# ELEMENTE

DER

REINEN

# EMPFINDUNGSLEHRE

VON

W. PREYER.

JENA

VERLAG VON HERMANN DUFFT.

1877.

R52789

HERRN

PROFESSOR DOCTOR

# HERMANN GRASSMANN

IN STETTIN

DEM

BEGRÜNDER DER AUSDEHNUNGSLEHRE

WIDMET DIESE SCHRIFT

VEREHRUNGSVOLL

DER VERFASSER.

# INHALTSANZEIGE.


Seite

Einleitung . . . . . 1

Erster Abschnitt: Die sprachlichen Bezeichnungen in dem Gebiete der reinen Empfindung . . . . . 9

§ 1. Die einfache reine Empfindung . . . . . 9

§ 2. Ausdrücke für die Empfindungsstärke . . . . . 10

§ 3. Ausdrücke für die Empfindungsart . . . . . 12

Zweiter Abschnitt: Die Begriffe Intensität und Qualität der Empfindung . 17

§ 4. Verschiedenheit der Intensität von der Qualität . . . . 17

§ 5. Die Empfindungsintensität . . . . . 19

§ 6. Die Empfindungsqualität . . . . . 21

Dritter Abschnittt: Die Art der Verknüpfung von Intensität und Qualität in der Empfindung . . . . . 24

§ 7. Die allgemeine Formenlehre von Hermann Grassmann dient zur Ermittlung der Verknüpfungsarten . . . . . 24

§ 8. Die Gleichheit und die Verschiedenheit der Intensität, der Qualität der Empfindung . . . . . 25

§ 9. Das Ergebniss der Verknüpfung . . . . . 26

§ 10. Die associative Verknüpfung . . . . . 28

§ 11. Die Associativität im Empfindungsgebiet . . . . . 29

§ 12. Die commutative Verknüpfung . . . . . 31

§ 13. Die Commutativität im Empfindungsgebiet . . . . . 32

§ 14. Die thetische und lytische Operation im Empfindungsgebiet im Allgemeinen . . . . . 33

§ 15. Die formale Beziehung der lytischen Operation zur thetischen . . . . . 34

§ 16. Die Lysis des thetischen Vorgangs in der Empfindung . . 35

§ 17. Die Eindeutigkeit des Ergebnisses der Lysis einer associativen commutativen thetischen Verknüpfung stempelt diese als die additive; die Lysis ist die Subtraction . . . . 37

§ 18. Die Addition und Subtraction in der Empfindung . . . . 39

§ 19. Die indifferente Grösse und die lytische Grösse formal . . 41

§ 20. Der Unterschied Null in der Empfindung . . . . . 42

§ 21. Addition und Subtraction gleichartiger Empfindungsänderungen . . . . . 44

§ 22. Die negative Intensität und Qualität und der Nullpunct im Empfindungsgebiet . . . . . 45

§ 23. Ausser der Addition und Subtraction gibt es im Empfindungsgebiet noch eine thetische Verknüpfungsart . . . 49

Seite

§ 24. Die formale Beziehung der Multiplication zur Addition . 50
§ 25. Die multiplicative Verknüpfung im Empfindungsgebiet in der Hebung durch Contrast realisirt . . . . . 51
§ 26. Die distributive Eigenschaft der multiplicativen Verknüpfungen . . . . . 52
§ 27. Thatsachen aus der Farbenlehre und Tonlehre . . . . 52
§ 28. Der Multiplicationsact in der Empfindung . . . . . 54
§ 29. Die Lysis der multiplicativen Thesis ist die Division . . 56
§ 30. Die Division im Empfindungsgebiet . . . . . 56
§ 31. Die reale Bedeutung nur des allgemeinsten Multiplicationsbegriffes für das Empfindungsgebiet wurde bis hierher erörtert . . . . . 57

Vierter Abschnitt: Die geometrische Addition und Subtraction der Intensität und Qualität . . . . . 59

§ 32. Die einfache reine Empfindung wird erzeugt gedacht durch zwei unabhängige verschiedene Änderungsweisen des Empfindungselements . . . . . 59
§ 33. Die Ebene des Empfindungsfeldes . . . . . 60
§ 34. Die Empfindungsänderung . . . . . 61
§ 35. Der Begriff der Empfindungsvection, der Intensitäts- und Qualitätsvection . . . . . 63
§ 36. Eigenschaften der Intensitätsvectoren und Qualitätsvectoren 64
§ 37. Subtraction und Addition der Intensitäts- u. Qualitätsvectoren 66
§ 38. Vertheilung der Empfindungen in die vier Quadranten der Empfindungstafel . . . . . 67
§ 39. Die Summe des Intensitätsvectors und Qualitätsvectors ist der Empfindungsvector . . . . . 69
§ 40. Die absolute Länge des Empfindungsvectors ist jedoch kleiner als die Summe der absoluten Längen des Intensitäts- und des Qualitäts-Vectors . . . . . 70
§ 41. Unterschied der Vectoren- und Punctgleichungen von algebraischen Gleichungen . . . . . 70

Fünfter Abschnitt: Die geometrische Multiplication und Division der Intensität und Qualität . . . . . 73

§ 42. Die arithmetische Multiplication und Division der Intensitäts- und Qualitäts-Vectoren . . . . . 73
§ 43. Die Neigung des Empfindungs-Vectors gegen den Qualitäts- und Intensitäts-Vector . . . . . 75
§ 44. Die einfachen reinen Empfindungen als complexe Variable 76
§ 45. Die geometrische Construction der Empfindungen als complexer Grössen . . . . . 77
§ 46. Rückblick . . . . . 81

Anhang: H. Grassmann über die Theorie der Farbenempfindungen . . . 83

# ELEMENTE

DER

REINEN

# EMPFINDUNGSLEHRE.

# EINLEITUNG.

Jede sinnliche Wahrnehmung, wie immer sie beschaffen sei, erfordert in erster Linie das Zusammentreten der drei unabhängigen Factoren: Empfindung, Zeit und Raum. Fällt nur einer fort, so verschwindet die ganze Wahrnehmung; denn ohne Empfindung ist keine, und jede Empfindung ist irgendwo und irgendwann; jede wird — wie ich der Kürze halber sage — von dem empfindenden Subject localisirt und temporisirt. Eine Empfindung ohne Bezugnahme auf den Raum und ohne Bezugnahme auf die Zeit hat Niemand, der sich Rechenschaft über seine Empfindungen gibt, das heisst: der wahrnimmt. Es ist gewiss, dass die genannten drei Factoren zur Charakteristik einer jeden noch so einfachen Wahrnehmung nothwendig sind. Sie sind nothwendig, aber zu jener Charakteristik nicht hinreichend, schon weil jeder Empfindung ausserdem noch eine Ursache untergelegt wird; sie wird — wie ich es kurz nenne — causalisirt. Hiervon soll aber im Folgenden abgesehen werden. Es handelt sich nur um diejenigen Bestandtheile der sinnlichen Wahrnehmung, welche unabhängig von der Voraussetzung einer Aussenwelt, somit eines äusseren oder inneren Reizes oder einer Empfindungsursache, sind. Diese Einschränkung ist nicht nur zulässig, sondern darum wesentlich, weil der Process der Causalisation, welcher in der Hypostasirung von Ursachen besteht, die Localisation und Temporisation der Empfindung schon voraussetzt, und eine jede künftige Wahrnehmungswissenschaft zuerst dieser Fundamente, und zwar zuallererst der Untersuchung der reinen

Empfindung für sich bedürfen wird, ehe sie das Problem der Ursachsetzung in Angriff nehmen kann. In der vorliegenden Schrift handelt es sich aber nur um die Fundamente.

Dass deren Betrachtung zu einer neuen Disciplin führt, welche ich die reine Empfindungslehre nenne, zeigt die folgende Überlegung.

Erstens. Die Geometrie im gewöhnlichen Sinne, oder die reine Raumlehre, verlangt principiell, dass vollständig abstrahirt werde von irgend welchem Inhalte des Raums, und es ist ihr die Zeit grundsätzlich kein Untersuchungsobject. Der reinen Raumlehre, welche für keinen ihrer Untersuchungsgegenstände in der Erscheinungswelt das adäquate Object vorfindet, ist es vollkommen gleichgültig, ob das Dreieck farbig ist oder nicht — es hat keine sinnlichen Eigenschaften, folglich auch keine Farbe, wie jeder Begriff. Aber es ist auch die Zeit als solche dem Vorwurf der Geometrie fremd. Ob der Ort, durch dessen Änderung die Linie entsteht, sich langsam oder schnell ändert, ist geometrisch irrelevant, wenn er sich nur überhaupt ändert. Als Object der reinen Raumlehre tritt die Zeit nirgends auf. Wenn sie auch praktisch als Werkzeug oder Hülfsmittel der Verständigung unentbehrlich ist, so beweist doch die blosse Existenz der Geometrie als theoretischer Wissenschaft vom reinen Raum, dass thatsächlich das Denken von den beiden anderen Factoren der Wahrnehmung gänzlich abstrahirt. Man kann nicht einwenden, dass in dem Acte des Abstrahirens (Abziehens) selbst schon die Zeit implicirt sei, denn dadurch wird die Betrachtung des von allem Zeitlichen — wie von allem Empfindbaren — frei gedachten Raumes, als Objectes der reinen Geometrie, nicht im Mindesten beeinträchtigt oder auch nur berührt.

Zweitens. Eine reine Zeitlehre — Chronometrie — eine Disciplin, welche grundsätzlich alles Räumliche und jeden Inhalt, der durch die Empfindung gegeben wäre, ausschliesst, und nur die reine Zeit zum Gegenstande hätte, existirt zwar unter diesem Namen nicht. Nachdem aber Sir W. R. Hamilton[1]) sich eingehend mit den Thatsachen, welche der Algebra als Wissenschaft zu Grunde liegen, beschäftigt hatte, kam er zu der Überzeugung,

1) *Theory of conjugate functions; with a preliminary and elementary essay on Algebra as the science of pure time. Transactions of the royal Irish academy. Dublin 1837. Vol. XVII, p. 292—392 (essay) p. 393—423 (theory of conjugate functions or algebraic couples).*

dass sie sich aus dem Zeitbegriff, für welchen der Begriff des Continuirlich-veränderlichen (Fliessenden), wie für sie selbst, charakteristisch sei, entwickeln lasse. Er führte auch den Versuch dieser Entwicklung aus, und definirt die Algebra geradezu als die Wissenschaft von der reinen Zeit, oder als die Wissenschaft von der Ordnung im Nacheinander, während die Wissenschaft vom reinen Raum die Wissenschaft von der Ordnung im Nebeneinander ist. Wenn nun auch über die Art und Weise jener Entwicklung sich streiten lässt, die Möglichkeit einer Wissenschaft von der reinen Zeit als einer Disciplin, deren Object vom Räumlichen und Empfindbaren gänzlich frei bleibt, indem sie sich beider nur bedient, um sich zu verständlichen, ist unbestreitbar. Die Absonderung der zwei Factoren jeder Wahrnehmung, Raum und Empfindung, von dem dritten, und die selbständige wissenschaftliche Behandlung des letzteren, ist durchführbar, auch wenn der bewunderungswürdige Versuch solcher Durchführung, welcher bereits vorliegt, nicht ganz triftig sein sollte. Dieses bezweifelt Niemand.

Drittens. Ich verlange nun, dass ebenso wie in der reinen Raumlehre von Empfindung und Zeit, und ebenso wie in der reinen Zeitlehre von Empfindung und Raum abstrahirt wird, so in der reinen Empfindungslehre von der Zeit und vom Raum abstrahirt werde. Dass in allen drei Disciplinen von jeder causalen Beziehung abgesehen wird, wurde schon gesagt. Dass bei der Reindarstellung des Objects einer theoretischen Wissenschaft vom Raum und einer ebensolchen von der Zeit, jedes einzeln genommen, von allem anderen abstrahirt werden kann, ist bewiesen. Dass endlich, sofern es sich um Isolirung des Objects der reinen Empfindungslehre handelt, von allem, was nicht Empfindung ist, abstrahirt werden kann, wird Jeder zugeben, der seine eigenen Empfindungen von den Zuthaten seiner eigenen Verstandesthätigkeit zu unterscheiden vermag. Es ist jedoch nicht etwa bloss zulässig und nützlich in dieser Lehre sich fortwährend räumlicher und zeitlicher Begriffe zu bedienen, sondern nothwendig zum Verständniss. Aber der Untersuchungsgegenstand selbst, nämlich die reine Empfindung für sich betrachtet, hat nicht das geringste Räumliche und Zeitliche an sich, und darauf beruht die Nöthigung ihn von Zeit und Raum gesondert zu betrachten.

Um diese Darlegung zu erläutern sei Folgendes hinzugefügt.

Wenn zu dem Object der reinen Raumlehre die Zeit als Object der Untersuchung hinzutritt, so entsteht ein Novum, die Be-

wegung, und diese bildet bekanntlich — ohne irgend welche Bezugnahme auf die Ursache der Bewegung oder die Beschaffenheit (den Stoff) des Bewegten, also namentlich ohne Bezugnahme auf Kraft, Masse, physikalische und chemische Eigenschaften — den ausschliesslichen Gegenstand der reinen Bewegungslehre, die auch reine Phorometrie, Phoronomie oder Kinematik genannt wird. Sie ist durchaus keine Geometrie, sondern diese ihr ein Hülfsmittel; und man kann getrennt untersuchen die longimetrische, die planimetrische und die stereometrische Bewegung.

Wenn nun zu der reinen Empfindung als Wissenschaftsobject die Zeit hinzutritt, so resultirt gleichfalls ein Novum, nämlich die Empfindungsdauer, welche keineswegs in dem reinen Empfindungsbegriff schon enthalten ist, vielmehr voraussetzt, dass jede Empfindung zeitlich zwischen zwei anderen Empfindungen auftritt, indem sie, wie ich es eingangs bezeichnete, temporisirt wird. Diese Temporisation oder Verzeitlichung der Empfindung, wobei noch vom Raum gänzlich (ebenso wie von Ursachen) abgesehen wird, und die Empfindungen nach ihren verschiedenen Eigenschaften zeitlich in Betracht kommen, bildet in sofern eine höhere Stufe, als zu der Mannigfaltigkeit der reinen Empfindung eine neue Dimension hinzugekommen ist. Man kann sagen: die temporisirte Empfindung bildet eine höhere mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit mit nicht vertauschbaren Dimensionen, und zwar die der reinen Empfindung nächst höhere Mannigfaltigkeit. In ihr entspricht dem Abstande zweier Puncte die Perception des Nacheinander, also des zeitlichen Unterschiedes der Empfindungen, welche Perception aber etwas wesentlich anderes ist, als jener Abstand selbst, und den Gegenstand einer besonderen Abtheilung der Wahrnehmungswissenschaft bildet, welche man Temporisationslehre nennen kann.

Wenn dagegen zu der reinen Empfindung der Raum allein hinzutritt, so resultirt ein anderes Novum, nämlich die Localisation, welche jede Empfindung räumlich zwischen, das heisst neben andere Empfindungen setzt. Hierdurch erhalten die empfindbaren Dinge ihre Orte in der Aussenwelt. Diese Verräumlichung der Empfindung, bei welcher von der Temporisirung gänzlich abgesehen wird, und allein die Ordnung der Empfindungen räumlich in Betracht kommt, zerfällt in drei Theile. Ist nämlich der Raum nur nach einer Richtung ausgedehnt, so bildet die in der geraden Linie localisirte Empfindung, wie die temporisirte Empfindung, eine um eine Dimension mehr als die einfache reine

Empfindung ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Ist der Raum eine Ebene, so resultirt aus der Localisirung eine um zwei Dimensionen mehr ausgedehnte Mannigfaltigkeit, und wenn man die Localisirung in dem dreifach ausgedehnten physiologischen Raume vornimmt, aber ohne Rücksicht auf die Zeit, so erhält man eine um drei Stufen erhöhte oder um drei Dimensionen mehr, als die einfache reine Empfindung, ausgedehnte Mannigfaltigkeit; also: I. lineale oder longimetrische[1]), II. planimetrische, III. stereometrische Localisirung. Man kann sagen, dass II für I, und III für II imaginär ist. Hierbei ist keine Dimension mit einer anderen vertauschbar. In diesen Mannigfaltigkeiten entspricht dem Abstande zweier Puncte die Perception eines räumlichen Unterschiedes der Empfindungen, welche etwas ganz anderes, als jener Abstand selbst ist, und wiederum den Gegenstand einer besonderen Abtheilung der Wahrnehmungswissenschaft, nämlich der Localisationslehre, bildet.

Sowohl mit I wie mit II wie mit III kann die Zeit combinirt werden. Wird sie mit I combinirt, so hat man die temporisirte Empfindung lineal localisirt, z. B. die Perception eines leuchtenden Punctes, welcher während seiner Bewegung seine Farbe und zugleich seine Lichtstärke, aber nichts weiter, verändert in einem Raum, der nur éine Dimension hätte. Diese gehört demnach in eine vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Wird die Zeit mit II combinirt, so hat man die temporisirte Empfindung planimetrisch localisirt, z. B. die Perception eines kreisförmig sich bewegenden leuchtenden Punctes, der Farbe und Lichtstärke, aber nichts anderes, während seiner Bewegung in einem Raum von nur 2 Dimensionen ändert. Solche Perceptionen gehören demnach in eine fünffach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.

Wird schliesslich, indem die Zeit mit III sich combinirt, die temporisirte und im physiologischen Raume localisirte Empfindung als ein Ganzes zum Wissenschaftsobject, so ist dieses die Wahr-

1) Trotz ihrer grossen Einfachheit ist die Longimetrie, bei der nur ein System von Puncten in einer Geraden und Relationen zwischen den gegenseitigen Entfernungen der Puncte in Betracht kommen, keineswegs unfruchtbar geblieben, zumal Möbius (Über eine Methode, um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen, in Crelles Journ. f. Mathematik 1856, Bd. 52, S. 229) durch Betrachtung der aus Gleichungen der Geraden bestimmten, aber longimetrisch nicht construirbaren, also in der Geraden imaginären Puncte, neue Beziehungen zur Planimetrie entwickelte. Dieses liesse sich wohl auf die Zeit anwenden.

nehmung im eigentlichen Sinne, soweit Empfindung, Zeit und Raum in Betracht kommen, vollständig, und zwar so wie sie beim Menschen realisirt ist.

Diese vollständige Wahrnehmung bildet, wenn, wie soeben schon angenommen wurde, die einfache reine Empfindung zwei Dimensionen hat, eine sechsfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, indem zwei ihrer Dimensionen der Empfindung, eine der Zeit, drei dem Raume angehören. In diesem Gebilde ist ebensowenig wie in einem der vorgenannten eine Dimension mit der anderen vertauschbar. Denn nur im geometrischen Raum existirt diese Vertauschbarkeit, nicht im physiologischen oder Wahrnehmungs-Raum, wo links von rechts, oben von unten, hinten von vorn specifisch verschieden ist. Der Abstand zweier Puncte dieser Mannigfaltigkeit entspricht der Wahrnehmung einer wirklichen Änderung in der Erscheinungswelt, welche immer mindestens sechs voneinander unabhängige Bestimmungsstücke erfordert. Als Beispiel kann ein leuchtender Punct dienen, welcher sich spiralig bewegt und zugleich seine Helligkeit und Farbe verändert.

Dass die genannten Mannigfaltigkeiten sämmtlich stetige Mannigfaltigkeiten im Sinne Riemann's [1]) sind, ist zwar nur eine Voraussetzung, aber eine Voraussetzung, welche nicht zu umgehen ist, wenn man die Gesammtheit der sinnlich wahrnehmbaren Welt, also die Erscheinungswelt, auch wirklich in der Wahrnehmung umspannen will. Das Stetige findet sich weder in der Wahrnehmung, noch in der Erscheinung; das Werden wird weder innerlich noch äusserlich wahrgenommen, sondern nur das Gewordene. Da aber die Wissenschaft von den Erscheinungen und die von den Wahrnehmungen ohne den Begriff des Stetig-veränderlichen, welchen der Verstand erst in beide hineinträgt, nicht bestehen können, so werden eben jene Mannigfaltigkeiten als stetige zu bezeichnen sein.

Noch complicirter, als die Betrachtung der bisher namhaft gemachten Combinationen wird die Untersuchung der Combination zweier oder mehrerer Wahrnehmungen eines und dann zweier Sinnesgebiete. Hierbei wird aber überall die reine Empfindungslehre vorausgesetzt, welche als besondere Wissenschaft noch nicht anerkannt ist. Ich hoffe, dass durch die vorliegende Arbeit ihr eine Grundlage geschaffen wird.

1) Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen. 1868. Bd. XIII. S. 135.

Was die Darstellung betrifft, so ist es, wie schon oben gesagt wurde, nothwendig in der Sache selbst von allem, was nicht reine Empfindung ist, vollständig abzusehen; also kommen Reize (Schwingungen), Nervenerregungen, Ganglienzellenthätigkeit, Erregbarkeit, Ermüdung ebensowenig als Untersuchungsgegenstände in Betracht, wie die Dauer, Aufeinanderfolge, räumliche Anordnung des Empfundenen. Diese an sich keineswegs leichte Loslösung wird wahrscheinlich dem Leser noch dadurch erschwert werden, dass ich von räumlichen und zeitlichen und physiologisch-empirischen Veranschaulichungsmitteln den ausgiebigsten Gebrauch zu machen genöthigt bin; aber auch die abstractesten Theile der Mathematik bedürfen der geometrischen Repräsentation.

Für das Verständniss förderlich, für die weitere Verfolgung der von mir behandelten Gegenstände nothwendig, ist das Studium der von Hermann Grassmann[1]) begründeten Ausdehnungslehre, welche wesentlich verschieden ist von der Geometrie, da diese nicht über die tridimensionale Mannigfaltigkeit des Raumes hinausgehen kann. Die Geometrie, als reine Raumlehre, ist eine auf den Raum angewandte Ausdehnungslehre[2]). So kann man auch sagen die reine Empfindungslehre sei bis zu einem gewissen Grade eine auf die Empfindung, als eine Mannigfaltigkeit, angewendete Ausdehnungslehre.

Um die Empfindungslehre sowohl für sich, als mit Rücksicht auf die reine Wahrnehmungswissenschaft zu entwickeln — wobei zu bedenken, dass diese letztere eine besondere Abtheilung der Sinnesphysiologie oder Psychologie bildet, da sie es mit der sinnlichen Thätigkeit nicht mehr als einer zusammengesetzten Function

1) Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin. Erster Theil: die lineale Ausdehnungslehre enthaltend. Leipzig 1844, O. Wigand (XXXII u. 279 Seiten). Der zweite Theil ist nicht erschienen, der erste vergriffen; ferner von demselben Verfasser: Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form. Berlin 1862, Enslin (XII u. 388 Seiten).

2) Auch die Zeitlehre ist im Sinne Grassmann's eine auf die Zeit angewendete Ausdehnungslehre und die Arithmetik hat dann mit der Zeit ebensowenig zu thun wie die Geometrie. Ihm zufolge wäre die Zeit wie die gerade Linie ein Punctgebiet (Elementargebiet) zweiter Stufe, die Zeitpuncte wären ihre Elemente, die Zeiträume ihre Strecken, und letztere können, wie die der geraden Linie als Zahlen dargestellt werden, wenn ein Zeitraum als Maasseinheit zu Grunde gelegt ist. In der That ist gegen diese Auffassung nichts principiell einzuwenden, da die Longimetrie factisch nur die Übertragung eines Theiles der Ausdehnungslehre auf die gerade Linie ist.

von Reizen zu thun hat, sondern als einem unabhängig vom Reize gegebenen Complexe — ist es erforderlich, dass, was ich die Kritik des Empfindens nennen möchte, fortwährend ausgeübt werde. Man muss sich fragen: Was ist das Empfundene in jedem einzelnen Fall?

## ERSTER ABSCHNITT.

# Die sprachlichen Bezeichnungen in dem Gebiete der reinen Empfindung.

§ 1. Was eine Empfindung ist, lässt sich nicht definiren. Man kann sie den Inhalt einer Wahrnehmung nennen. Dieser Ausdruck ist gleichbedeutend mit dem Kant's, dass die Empfindung die Materie der Wahrnehmung [1]) oder die Materie der sinnlichen Erkenntniss [2]) sei. Wenn aber weiter der grosse Philosoph das der Realität Correspondirende [3]), das der Realität der Erscheinungen in der empirischen Anschauung Correspondirende [4]) Empfindung nennt, so liegt in dieser Bezeichnung schon etwas Arbiträres, denn nichts widerspricht der Identität des Realen in den Erscheinungen und der Empfindung. Dann correspondirt nicht die Empfindung dem Ding an sich, sondern sie ist es selbst. Die Discussion dieser Identificirung gehört jedoch nicht hierher, sondern in die Metaphysik.

Wird nun von der Wahrnehmung alles weggenommen gedacht, was weggenommen werden kann, ohne dass ihr Inhalt verschwindet, so bleibt nur zweierlei übrig, die Stärke oder Intensität und die Art oder Qualität der Empfindung. Von diesen beiden Stücken lässt sich keins — obwohl jedes für sich betrachtet werden kann — fortgenommen denken, ohne dass die ganze Empfindung mitverschwindet, ebenso wie der Begriff der Ebene verschwindet, wenn man eine ihrer beiden Dimensionen wegdenkt.

---

1) Kritik der reinen Vernunft. Elem. I, 2. Abschn. Allg. Anm. (Kant's Werke herausgeg. v. Rosenkranz u. Schubert 2. B. S. 49).

2) Ebenda II, Einleitung (Werke 2. Bd. S. 55).

3) Ebenda, Schematismus der Verstandesbegriffe (Werke 2. Bd. S. 126, 129).

4) Ebenda, Anticipationen der Wahrnehmung (Werke 2. Bd. S. 146). Die Empfindung „bezeichnet" das Reale der Anschauungen (Prolegom. zur Metaphysik § 25; Werke 3. Bd. S. 68). Kant sagt ausdrücklich, dass die Empfindung dem Realen entspreche, ohne dass jedoch bei ihm ein einziger Grund gegen die Identität sich vorfände oder die Möglichkeit der letzteren auch nur angedeutet wäre.

Die Empfindungsintensität und -qualität nebst ihrer Vereinigung zu Empfindungen, und die Verknüpfung der letzteren miteinander, bilden den Gegenstand der reinen Empfindungslehre; und zwar besagt der abstracte Ausdruck reine Empfindung, dass der Inhalt der einzelnen möglichst einfachen Wahrnehmung von allem, was nicht nothwendiges Attribut der vereinigten Intensität und Qualität ist, losgetrennt wurde. Die Nothwendigkeit eines Attributes wird daran erkannt, dass, im Falle man es wegdenkt, die ganze Empfindung mitverschwindet. Das zur vereinigten Intensität und Qualität, also zur reinen Empfindung, nicht Nothwendige wird daran erkannt, dass es weggedacht werden kann, ohne dass die Empfindung mitverschwindet. In der reinen Empfindung ist also namentlich von Ursache, von Zeit und Raum, somit von einer Aussenwelt, nichts mehr zu finden.

Einfache reine Empfindung bedeutet, dass die so gereinigte, allein noch übrige Verbindung nur eine bestimmte Intensität und Qualität hat. Ihr steht gegenüber die combinirte oder mehrfache oder zusammengesetzte Empfindung, in der mehrere Intensitäten und Qualitäten sind. Die einfache reine (e. r.) Empfindung ist aber nicht mehr vorhanden, wenn man ihr die Qualität oder die Intensität nimmt. Sie besteht eben in der Vereinigung beider, ist keinesfalls vor der Vereinigung vorhanden.

§ 2. In einer e. r. Empfindung kann sich ändern die Stärke allein oder die Art allein oder beide, und zwar ist zu unterscheiden eine Steigerung und eine Herabsetzung beider in jedem Sinnesgebiet.

Die Steigerung den Intensität einer Lichtempfindung gibt die Empfindung des Hellen, des Lichten, der Helligkeit oder der Lichtstärke, die Herabsetzung derselben die des Dunkeln, des Finstern, der Dunkelheit oder der Lichtschwäche. In der Empfindung charakterisirt sich jede Steigerung der Lichtstärke dadurch, dass sie mit einer Annäherung an die Empfindung Weiss verbunden ist, jede Herabsetzung derselben durch eine Annäherung an Schwarz. Das hellste Weiss, welches man überhaupt empfinden kann, ist ebenso die höchste Lichtintensitätsempfindung, wie das dunkelste oder tiefste Schwarz (in welchem die Helligkeitsempfindung die kleinstmögliche wird) die geringste Lichtintensitätsempfindung ist. Zwischen diesen Extremen liegen alle anderen Helligkeitsempfindungen, so dass man durch unzählige Übergangsstufen — der Voraussetzung noch stetig — vom einen zum anderen gelangen kann, d. h. vom tiefsten Schwarz durch Steigerung der äusserst geringen

Helligkeit desselben zum höchsten Weiss, und von diesem ebenso rückwärts, durch Herabsetzung der Intensität, zum tiefsten Schwarz. Bei diesem Übergange passirt man einen Punct, der ebenso verwandt mit dem äussersten Schwarz, wie mit dem äussersten Weiss ist und welcher von beiden gleich verschieden empfunden wird. Dieser Punct ist das mittlere Grau. Zwischen ihm und Weiss liegen alle hellgrauen (weissgrauen, weisslichgrauen) Empfindungen, zwischen ihm und Schwarz alle dunkelgrauen (schwarzgrauen, schwärzlichgrauen) Empfindungen [1]). Man kann auch statt durch Grau durch jede beliebige farbige Lichtempfindung vom Schwarz zum Weiss (und umgekehrt) stetig gelangen.

Die Steigerung der Intensität einer Schallempfindung gibt die Empfindung des Lauten, die Herabsetzung derselben die des Leisen.

In der Empfindung charakterisirt sich die Steigerung der Intensität hierbei durch eine Annäherung an das Lauteste, den stärksten Lärm, das stärkste Geräusch, die Herabsetzung durch eine Annäherung an die Empfindung der Stille. Zwischen diesen beiden Extremen liegen alle Empfindungen des Leisen und Lauten, in unzähligen Übergängen vom einen zum anderen stetig führend, rückwärts und vorwärts. Es muss also einen Punct geben, welcher allerdings noch nicht näher experimentell ermittelt wurde, wo das Empfinden von dem Lautesten, was überhaupt empfunden werden kann, ebenso weit abweicht, wie von der tiefsten Stille, die überhaupt empfunden werden kann. Auf der einen Seite von diesem Punct mittlerer Schallintensität liegen die absolut lauten, auf der anderen die absolut leisen Empfindungsstufen, und der Punct selbst ist dem Leisesten ebenso verwandt wie dem Lautesten. Man nennt diese Empfindung für sich weder laut noch leise.

Auch beim Berührungssinn gibt es hinsichts der Intensität zwei Extreme. Eines repräsentirt der stärkste Druck, der überhaupt empfunden werden kann, das andere der geringste, d. i. aber die Empfindung der grössten Erleichterung. Dabei sind gleichfalls alle zwischenliegenden Berührungsstärken in zwei Abschnitte gesondert, und zwar durch einen Punct mittlerer Berührungsintensität, wo die Empfindung weder einer Erleichterung (z. B.

1) E. Hering, in den Sitzungsber. der k. Akad. der Wissensch. zu Wien. 49. Bd. Math.-phys. Cl. 3. Abth. 1874. Zur Lehre vom Lichtsinne. 4. Mitth. § 22. Dass man ein von gegebenem Schwarz und Weiss gleich abweichendes Grau herstellen kann, bewies Plateau (Poggendorff's Annal. der Physik und Chemie. 150. Bd. S. 466. 1873).

durch Zug von der Haut fort) noch eines Druckes i. g. S. vorhanden ist (die durch unbewegte atmosphärische Luft berührte normale Haut).

Beim Berührungssinn ist es also der Druck, welcher der Empfindungsintensität entspricht. Die Steigerung kann übrigens hierbei durch stark, die Herabsetzung durch schwach bezeichnet werden. Denn man kann die Ausdrücke schwer-leicht und hart-weich nicht an ihre Stelle setzen, schon weil sie nicht umfassend genug sind, indem es Berührungsempfindungen gibt, die weder in die eine noch in die andere Kategorie gehören. Beide beziehen sich nur auf Widerstandsempfindungen, während die Ausdrücke „stark-schwach" auf jede Berührungsempfindung ohne Ausnahme anwendbar sind und namentlich die grösste Erleichterungsempfindung gleich der schwächsten Druckempfindung ist [1]). Auch ist beachtenswerth, dass sie direct auf Licht- und Schall-Empfindungen bezogen werden, statt der specielleren Ausdrücke hell-dunkel und laut-leise.

Zudem werden alle übrigen Empfindungen als stark oder schwach bezeichnet, namentlich die Schmeck- und Riech-Empfindungen; und wenn man abstufen will, so bedient man sich keiner specifischen Empfindungsbezeichnungen, sondern der Ausdrücke „sehr stark" „sehr schwach" und unterscheidet von der schwächsten Empfindung aufsteigend: untermerklich, kaum merklich, ebenmerklich, merklich, deutlich, übermerklich, sehr deutlich u. a., woraus aber keineswegs folgt, dass eine ganze Empfindung in jeder Beziehung um so deutlicher oder klarer, d. h. um so besser beurtheilt sei, je stärker sie ist, da bei sehr gesteigerter Intensität zwar die Empfindung sehr stark, aber die Qualität undeutlich wird.

§ 3. Für die Qualität der Empfindung sind die Bezeichnungen viel reicher, als für die Intensität.

Beim Lichtsinn wird die Qualität durch den Farbenton (die Farbennüance, Farbenstufe) repräsentirt, und das „Hoch" (im Gefühl die „Kälte") und das „Tief" (im Gefühl die „Wärme") der Farbe unterschieden. Braun steht tief (warm) gegen Grün, Roth tief (warm) gegen Blau, Gelb hoch (kalt) gegen Braun, aber tief (warm) gegen Blau, Grün tief gegen Blau, hoch gegen Gelb. Wenn

1) Man kann auch die tiefste Dunkelheit (Schwarz) als geringste Helligkeit und die tiefste Stille als geringste Lautheit bezeichnen. Weder an der Empfindung des Schwarzen, noch an der des Leisen haftet etwas Negatives, ebenso ist die Empfindung des Zuges (von der Haut fort) nichts weniger als negativ; was für den Reiz gilt überträgt sich durchaus nicht auf die Empfindung.

man hiernach sämmtliche einfache Farbenqualitäten, d. h. solche, in denen nur éine Qualität empfunden wird, in eine Farbenlinie ordnet, so dass die folgende immer höher steht, als die vorhergehende, so ergibt sich die Reihe Braun, Roth, Gelb, Grün, Blau.

Alle übrigen Farbenqualitätsempfindungen sind aus diesen zusammengesetzt. Bezüglich der Empfindung der Farbenhöhe (wie des Gefühls der Farbentemperatur) ist reinstes Grün für sich indifferent oder neutral, für sich weder hoch noch tief (weder kalt noch warm). Es bildet daher den Mittelpunct der Farbenqualitätsreihe, und man schreitet einerseits vom Grün zu den tiefen (dem Roth verwandten) andererseits zu den hohen (dem Blau verwandten) Qualitätsstufen fort. Hierzu kommen nun noch die schon erwähnten Empfindungen Weiss und Schwarz und Grau, aber nicht als den genannten gleichwerthige einfache Qualitäten. Denn beim Schwarz ist die Intensitätsempfindung unter allen Umständen schwach, die Farbenqualität im Schwarz undeutlich, beim Weiss die Intensitätsempfindung unter allen Umständen stark, die Qualität gleichfalls undeutlich. Schwarz wird erhalten, wenn die Intensität einer beliebigen Gesichtsempfindung herabgesetzt wird. Man kann sagen, dass im gewöhnlichen Weiss überwiegend Intensität und die Qualität sehr wenig empfunden wird. Bei der Herabsetzung der höchsten Lichtintensitätsempfindung oder des Weiss tritt (vgl. § 2) die Empfindung des Grau auf; und zwar hat man Dunkelgrau, wenn die Herabsetzung der Intensität so weit geht, dass schon das Schwärzliche überwiegt, Hellgrau, wenn die Intensität nicht soweit herabgeht. Jedes Schwarz, auch das reinste und tiefste, d. h. das von geringster Empfindungsintensität, geht, wenn die letztere zunimmt, über entweder in Grau und Weiss oder in eine Farbe. Ein absolut farbloses Grau kommt aber ebensowenig vor, wie ein absolut farbloses Weiss oder ein absolut farbloses Schwarz. Diejenige Farbenempfindung, welche weder sehr dunkel oder schwärzlich, noch sehr hell oder weisslich empfunden wird, heisst gesättigt, diejenige, in der die Intensitätsempfindung überwiegt, weisslich, nämlich hell und ungesättigt, diejenige, in welcher die Intensitätsempfindung herabgesetzt ist, schwärzlich, nämlich dunkel und ungesättigt. Die Sättigung einer Farbenempfindung ist also an ein einziges ganz bestimmtes Verhältniss der Intensität zur Qualität gebunden, und zwar nennt man die Intensitätsempfindung in ihr weder sehr stark, noch sehr schwach.

Ausserdem muss noch erwähnt werden, dass eine Farbenempfindung, die zu einer vorhandenen Farbenempfindung hinzu-

kommt, weder selbst so empfunden wird, wie ohne jene erste, noch diese unverändert lässt; vielmehr tritt eine von der Intensität und Qualität beider Farben abhängige (resultirende) Empfindung auf. Diese darf nicht verwechselt werden mit der Mischfarbe, die durch Mischung objectiven Lichtes entsteht.

Beim Schallsinn wird die Qualität durch die Tonhöhe repräsentirt und die Steigerung durch das „Hoch", die Herabsetzung durch das „Tief" des Tones gegeben. Der Ton $c^{I}$ ist tief gegen $c^{II}$ und hoch gegen $C_{I}$, wobei das Quantitative in der Empfindung durch die Periodicität scharf markirt wird. Ordnet man alle e. r. Tonempfindungen vom tiefsten anfangend in eine Tonlinie, so beginnt diese mit dem Subcontra-C, dem $C_{II}$ und geht bis zum $e^{VIII}$, vielleicht sogar noch einige Stufen höher. Alle übrigen Schallqualitätsempfindungen (in Klängen und Geräuschen), welcher Art sie auch seien, entstehen durch Combinationen dieser einfachen Tonhöhen. Bezüglich der reinen Empfindung der Tonhöhe gibt es nun auf der Tonlinie eine kleine Strecke, wo die Töne, für sich gehört, weder für hoch, noch für tief erklärt werden. Wenigstens fehlt in dieser Region, die in der eingestrichenen Octave liegt, die Entschiedenheit des Urtheils, welche nie fehlt, wenn man fragt, ob Töne der anderen Octaven, einzeln gehört, tief oder hoch seien. Man kann daher in diese Gegend, etwa auf das isolirte $e^{I}$ oder $f^{I}$ den Mittelpunct oder Indifferenzpunct der Tonhöhenempfindung verlegen, welcher bezüglich derselben unseitig oder neutral ist, indem er (in der Empfindung) von der grössten Tontiefe ebensoweit abliegt, wie von der grössten Tonhöhe oder von beiden gleichviel enthält. Man gelangt von ihm aus abwärts schreitend zu Tönen, die einzeln gehört für tief erklärt werden, aufwärts zu solchen, die einzeln sämmtlich für hoch erklärt werden; $e^{I}$ oder $f^{I}$ selbst ist hoch gegen den einen, tief gegen den anderen Nachbarton und wird in der Regel, allein gehört, für einen Mittelton erklärt[1]). Die Empfindungen des Geräusches und der Stille sind den einfachen Tonhöhenempfindungen nicht gleichwerthig. Denn in der Empfindung der Stille ist die Intensitätsempfindung sehr schwach, die Stille aber als eine von jeder Tonempfindung verschiedene Empfindung, sehr deutlich und in ihr sind einzelne Tonhöhenempfindungen undeutlich. Beim lauten Geräusch dagegen ist die Intensitätsempfindung sehr stark, die Tonhöhenempfindung

1) Meinen an zahlreichen musikalischen und unmusikalischen Menschen gewonnenen Beobachtungen zufolge.

gleichfalls undeutlich. Die Empfindung sowohl der Stille, wie des Geräusches hängt von der Intensität und Qualität ab. Die Empfindung der Stille wird erhalten, wenn die Intensität beliebiger Tonempfindungen so abnimmt, dass die Qualität derselben gar nicht mehr empfunden wird, ein Geräusch wahrscheinlich immer dann, wenn mehrere Tonempfindungen zusammen sind, so dass die Qualität — nämlich die Tonhöhe — nicht mehr deutlich empfunden wird. Jede Tonempfindung kann bezüglich ihrer Intensität so gesteigert oder herabgesetzt werden, dass die Höhe nicht deutlich erkannt wird, im ersten Fall ist der Ton zu laut, im letzten zu leise für deutliche Empfindung. Diejenige Tonempfindung, deren Stärke weder so leise, noch so laut ist, dass die Höhe im mindesten undeutlich empfunden wird, heisst deutlich, rein, voll, glatt, die mit zu sehr herabgesetzter Intensität undeutlich, die mit zu sehr gesteigerter Intensität hat verschiedene Bezeichnungen z. B. schneidend, rauh. Rauh ist aber auch ein Ton, wenn er mit Geräusch verbunden ist, glatt wenn nicht. Die grösste Deutlichlichkeit einer Tonempfindung ist also an ein einziges ganz bestimmtes Verhältniss der Intensität zur Qualität gebunden, bei dem die Intensitätsempfindung weder sehr stark noch sehr schwach ist (Stimmgabeltöne gewisser Stärke).

Tritt endlich zu einer vorhandenen Tonempfindung eine andere hinzu, so wird weder diese so empfunden, wie sie für sich allein empfunden werden würde, noch lässt sie die vorhandene Tonempfindung unverändert, vielmehr entsteht eine neue Empfindung, z. B. die Intervallempfindung[1]).

Im Gebiete des Berührungs- oder Tastsinnes entspricht die Temperaturempfindung der Qualität, deren Steigerung durch die Wärme oder, im höchsten Grade, die Hitze (das „Hoch“ der Temperatur), deren Herabsetzung durch die Kälte (des „Niedrig“ oder „Tief“ der Temperatur) in der Empfindung gegeben ist. Dazwischen liegen „kühl, lau, lauwarm“, so dass „lau“ gegen „kühl“ hoch (warm) und „kühl“ gegen „heiss“ tief steht (oder umgekehrt). Zwischen dem Warmen und Kalten in der Mitte liegt die mit dem Gefühl der Behaglichkeit verbundene Temperaturempfindung, welche weder warm noch kalt oder sowohl warm als kalt ist, und von der aus man einerseits zur höchsten Wärme, andererseits zur

1) Über einige der hier berührten akustischen Empfindungen Näheres zur Begründung in meiner Schrift: Die Grenzen der Tonwahrnehmung. Jena 1876 (Heft 1 der „Sammlung physiolog. Abhandlungen“).

niedrigsten Temperaturempfindung der Kälte fortschreitet[1]). In diesem Sinnesgebiete kann übrigens besonders leicht bald die Intensitäts- bald die Qualitätsempfindung nahezu constant bleiben, so dass in ihrer Vereinigung in der Empfindung der Berührung bald nur die Intensität bald nur die Qualität beachtet wird.

Die Progression in den Qualitätsreihen des Geschmacks und Geruchs ist undeutlich. Von ihr sehe ich hier ab. Auch alle anderen Empfindungen sind noch zu wenig untersucht, als dass sie im Folgenden Verwendung finden könnten. Ja schon die letzte Behauptung, dass die Qualität der Berührungsempfindungen durch die Temperatur gegeben ist, wird hier zum ersten Male ausgesprochen. Ihre thatsächliche Begründung, welche etwas umfangreich ist, wird bei anderer Gelegenheit zu geben sein.

Auch die Voraussetzung, dass jede beliebige e. r. Empfindung eine gewisse Intensität und eine gewisse Qualität hat, alle anderen Eigenschaften der Empfindung im gewöhnlichen Sinne aber, die Temporisirung, Localisirung, Causalisirung ebensowie die durch sie bedingten Gefühle und Bewegungen, zu ihrem Wesen nicht nothwendig hinzugedacht zu werden brauchen, bedarf an dieser Stelle keiner näheren Begründung.

---

1) Zahlreiche Versuche, die ich an mir und an anderen angestellt habe, ergeben mit bemerkenswerther Übereinstimmung, dass Quecksilber beim Eintauchen eines Fingers immer dann Wärme-Empfindung gibt, wenn es über 33° C. warm ist, Kälte-Empfindung, wenn es unter 33° C. hat, wobei aber die Fingerhaut selbst ganz trocken bleibt und in der Luft weder mit einer Kälte- noch mit einer Wärme-Empfindung verbunden ist. Ist sie es, so wird der Neutral-Punct verschoben. Also beträgt die Temperatur der Epidermis der Fingerhaut normal nahe 33° C.

## ZWEITER ABSCHNITT.

# Die Begriffe Intensität und Qualität der Empfindung.

§ 4. Die Intensität oder Stärke der Empfindung kann ebensowenig wie die Art derselben durch Denken erzeugt werden, sondern ist immer und überall unmittelbar gegeben. Sie ist eine Grösse, denn man urtheilt, ob eine Empfindung stärker oder schwächer, als eine andere ist, d. h. ob die Intensität grösser oder kleiner ist; Weiss ist z. B. eine stärkere Empfindung, als Grau. Desgleichen ist die Qualität, namentlich die Tonhöhenempfindung, abstufbar. Auch sie ist eine Grösse, da man einen Ton höher oder tiefer, als einen anderen empfindet, d. h. urtheilt, ob die Tonhöhen viel oder wenig voneinander abweichen. Also kann man sagen, man urtheilt, ob die Qualität, nämlich die Tonhöhenempfindung, grösser oder kleiner ist.

Die Verschiedenheit der beiden Grössen Intensität und Qualität, von denen also sowohl die eine, wie die andere Grade hat, lässt sich, so deutlich verschiedenartig sie auch im Empfinden sind, doch nicht leicht durch Worte ausdrücken. Jedoch scheint diese Verschiedenheit von ähnlicher Natur zu sein, wie die Verschiedenheit der intensiven und extensiven Grösse überhaupt [1]).

1) Vergl. über das Verhältniss der extensiven Grössen zu den intensiven Grassmann, Ausdehnungslehre 1844 S. XXV. Kant unterscheidet zwar die intensive Grösse von der extensiven, trennt aber nicht die Intensität von der Qualität der Empfindung, wenn er von letzterer sagt, sie habe eine intensive Grösse (Werke 2. Bd. S. 147), wenigstens nicht in den angeführten Beispielen; und den Begriff der extensiven Grösse in seiner Allgemeinheit, wie ihm H. Grassmann erfasste, hatte Kant nicht, denn er beschränkt sich ausdrücklich auf die räumliche und zeitliche Ausdehnung, während gerade für den allgemeinen Begriff die Befreiung von dieser Schranke charakteristisch ist, indem der Raum nur als ein Specialfall eines Systems n-ter Stufe erscheint, d. h. in Riemann'scher Bezeichnung (1854) als ein Specialfall einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit (Grassmann 1844 S. 21. 22. 36. u. sonst). Den Begriff des Krümmungsmaasses hatte freilich Grassmann damals noch nicht; aber die Ausdehnungsgrösse als eines völlig unabhängig von Raum und Zeit

Folgende Parallele verdeutlicht:

| Intensität. | Qualität. |
|---|---|
| Die Intensitätsempfindung wird durch Erzeugung des Gleichen. | Die Qualitätsempfindung wird durch Erzeugung des Verschiedenen. |
| In der Intensitätsempfindung (wie in der Zahl) tritt die Einigung der Elemente hervor, welche ihrem Begriff nach zwar gesondert sind, aber nur in ihrem Im-Wesentlichen-sich-gleich-sein die Intensitätsempfindung bilden. | In der Qualitätsempfindung tritt (wie in der begrenzten Linie) die Sonderung der Elemente hervor, welche zwar, sofern sie die Qualität bilden, vereinigt sind, aber nur in ihrer Trennung von einander die Qualitätsempfindung ermöglichen. |
| Der Intensitätsempfindung wesentlich ist ihre Erzeugung durch eine stetige Reihe sich selbst gleicher Zustände, deren Quantität eben die jedesmal empfundene Intensität ist. | Der Qualität in der Empfindung wesentlich ist ein Auseinandertreten der Elemente und ein Festhalten derselben als auseinander seiender. Das erzeugende Element erscheint bei ihr als ein sich änderndes, d. h. durch eine Verschiedenheit der Zustände hindurchgehendes; und die Gesammtheit dieser verschiedenen Zustände bildet das Gebiet der Empfindungsqualität. Die jedesmal empfundene Qualität ist ein solcher Zustand. |
| Bei der Intensitätsempfindung unterscheidet man nicht die Elemente durch besondere Zeichen und Namen, sondern wo diese hervortreten, ist dadurch die ganze veränderliche Intensität bezeichnet (stark-schwach). | Bei der Qualitätsempfindung werden die verschiedenen Elemente mit verschiedenen Zeichen und Namen belegt (die Farbenstufen, Noten, Temperaturen). |

bestehenden Abstractum zuerst (in Deutschland) erfasst und entwickelt zu haben, dieses Verdienst gehört ihm allein, wenn auch seine verbale Unterscheidung der intensiven und extensiven Grösse, die ich im Text benutzte, wie alle solche Unterscheidungsversuche, nicht ausreichend ist. Übrigens brauchte schon Gauss (Göttingische gelehrte Anzeigen 64. St. S. 635) i. J. 1831 den Ausdruck „Mannigfaltigkeit von n Dimensionen".

Diese Sätze sollen nichts weiter, als einen Versuch bedeuten, die Verschiedenheit der Intensität und Qualität der Empfindung in Worten auszudrücken und zwar einen unzulänglichen Versuch. Die Sprache der Empfindungen ist soviel reicher als die der Wörter, dass zur Zeit noch jeder Versuch der Art sehr unvollkommen sein muss. Er soll auch nur dazu dienen auf die thatsächliche Verschiedenheit der beiden Seiten der e. r. Empfindung besonders aufmerksam zu machen, da dieselbe von grosser Bedeutung für das Folgende ist.

§ 5. Bezüglich der Empfindungsstärke kann die Reihe der Zustände, welche das Element der Empfindungsstärke durchläuft, durch eine gerade Linie veranschaulicht werden. Man kann dadurch die Änderungsweise der Empfindungsstärke versinnlichen, sofern dieselbe eine stetige ist. Zwar kann das Urtheil nur immer eine fertige, eine gewordene Empfindungsstärke enthalten, aber wie das Quecksilberniveau im Thermometerrohr beim Erwärmen von einem Grad zum anderen steigt nur indem es alle zwischen beiden liegenden Niveaux durchläuft, sich stetig ändernd, so kann man sagen, dass auch in der Empfindung eine Intensität, z. B. eine Helligkeit (Tonstärke, Druckstärke), nur dadurch an die Stelle einer anderen tritt, dass alle zwischenliegenden Intensitäts-(Helligkeits)grade von dem Element durchlaufen werden. Beim Thermometer wird der Theilstrich — der Grad — abgelesen, bei der Empfindungsstärke wird deren Grad beurtheilt. Dieses wird dadurch begründet, dass in jedem Empfindungsgebiete die Intensität so allmählich gesteigert werden kann, dass man ausser Stande ist zwei Grade, die einander sehr nahe liegen, direct als verschieden zu erkennen. Es ist darum erlaubt ein stetiges Werden anzunehmen, wie es auch gewöhnlich ohne besondere Motivirung und Zweifel zu geschehen pflegt. Dabei ist aber wichtig, das Empfundene von der Empfindungsstärke, die erreicht wird, zu unterscheiden. Empfunden wird nur die Änderung. Die einzelne Empfindungsstärke ist der Grad, welcher selbst nicht empfindbar ist. Wie der Thermometergrad keine Temperatur ist, sondern nur eine Temperatur anzeigt, d. h. nur eine Temperaturänderung, so ist eine bestimmte Empfindungsintensität ein Grad und kein Empfundenes, sondern ein Grad, der die Grösse der Änderung, welch letztere (die Änderung) allein das Empfundene ist, anzeigt, indem die Grösse es ist, welche in das (Wahrnehmungs-)Urtheil tritt. Wenn ich sage: ich empfinde etwas von der und der Stärke, so heisst das: es ist in mir eine Veränderung vor sich gegangen, die

ich empfand, und die Grösse der Änderung meinem Urtheil unterworfen, ist die und die. Ich habe aber nicht die Grösse selbst empfunden, sondern nur die Änderung. Wahrnehmungs-Urtheile messen also die Grösse empfundener Änderungen. Das Ergebniss der Messung ist immer eine bestimmte Intensität, wie der Abstand des Endpunctes einer geraden Linie von ihrem Anfangspuncte eine bestimmte Ausdehnung ist. Diese Ausdehnung correspondirt der Intensitätsänderung.

Wenn ich hierbei von einem Elemente der Empfindungsstärke spreche, so ist darunter weiter nichts zu verstehen, als dasjenige, was die stetige Änderung durchläuft. Es ist gleichgültig, wie man es sonst nennen will, ob Bewusstseinselement, psychisches Element oder Empfindungselement oder auch Element der Aufmerksamkeit. An und für sich ist dieses Element immer dasselbe (identisch oder einerlei); sowie aber die Linie als Bild der Intensitätsänderung gebraucht wird, so dass der Punct, dessen Ortsänderung die Linie gibt (in der Raumlehre), das Element vorstellt, muss man es als ein Verschiedenes, weil immer neu entstandenes oder erzeugtes auffassen. Die verschiedenen Zustände werden dann durch die verschiedenen Lagen des Punctes repräsentirt.

Um nun mit einem Element der Empfindungsstärke zu einer bestimmten Empfindungsstärke zu gelangen, ist es nothwendig, dass es gesetzmässig, und zwar in allen Momenten der Veränderung der Intensität nach demselben Gesetz, die Reihe der Zustände durchläuft, die es durchläuft. Diese Gesetzmässigkeit ist in der Empfindung der Intensität durch die Gleichheit der Richtung in der Änderung gegeben. Die einfache intensive Empfindungsgrösse, ist diejenige Grösse, welche durch eine in derselben Richtung erfolgende Änderung des erzeugenden Elements entsteht. Die einfache Empfindungsstärke wird erhalten dadurch, dass aus einem Element derselben $S_1$ durch einen Act der Änderung ein anderes ihm gleiches Element $S_2$ hervorgeht, dann aus $S_2$ durch den gleichen Act der Änderung ein drittes gleiches Element $S_3$ und so fort. Also entspricht geometrisch die Ausdehnung der geraden Linie der Änderung der Empfindungsstärke, d. h. einem Empfindungsgebilde erster Stufe, die unbestimmt lange Gerade der Gesammtheit aller Änderungen derselben Richtung. Macht das Element auch in der entgegengesetzten Richtung alle Änderungen stetig durch, die es durchmachen kann, so heisst die Gesammtheit aller Elemente, welche durch Fortsetzung derselben und der entgegengesetzten Änderung erhalten werden, ein Empfindungs-

system erster Stufe. In der Wirklichkeit entspricht die Steigerung (Empfindung der Verstärkung) der Ausdehnung der Linie nach der einen Richtung und die Herabsetzung (Empfindung der Schwächung) der nach der entgegengesetzten. Beide kann man sich bis in das Unendliche fortsetzbar denken, obwohl sie beim Menschen begrenzt sind, wie die Ausdehnung der Geraden. Die endliche Steigerung oder Herabsetzung, d. h. die Quantität der Intensitätseinheiten, also die bestimmte Intensitätsänderung, wird durch eine Strecke repräsentirt. Diese Intensitätsstrecke nennt man gewöhnlich einen Intensitätsunterschied, ohne dass der Beweis geliefert oder auch nur versucht worden wäre, den empfundenen Unterschied als eine durch Subtraction im gewöhnlichen Sinne erhaltene Differenz darzuthun. Auch ist darüber nichts bestimmt, ob die Verstärkung der Empfindung, d. h. die „Zunahme“ ihrer Intensität durch eine gewöhnliche Addition zu Stande kommt, oder etwa durch eine Multiplication oder gar Potenzirung. Beim Gebrauche des Ausdrucks Strecke ist stets zu behalten, dass sie eine bestimmte Richtung und Länge hat, also nur gleichgerichtete und gleichlange Strecken gleich sind, d. h. nur gleichgrosse und gleichsinnige Intensitätsunterschiede. Diese Strecken haben aber in der reinen Empfindung (wie in der Ausdehnungslehre) nichts von Zeit und Raum an sich.

Hierbei ist überhaupt zu bedenken, dass die Intensitätsunterschiede nur bildlich mit Linien verglichen werden [1]).

§ 6. Auch die Reihe der Qualitätsgrade, welche das Element derselben durchläuft, kann, wenn man, von aller Beziehung zum Reize absehend, nur die reine Qualitätsempfindung festhält und

1) Die Steigerung der Intensität kann, wie sich unten ergeben wird, erhalten werden durch additive Verknüpfung der Grösse, deren Intensität zunimmt, mit sich selbst, also, wenn A die Grösse, durch $A + A = 2A$ und so weiter. Sie wird also Product von A mit einer Zahl, und da diese auch, nach dem Vorigen, stetig veränderlich genommen werden kann, so gibt diese Multiplication, sämmtliche mögliche Intensitätsänderungen. So wie aber die letzteren durch Strecken i. g. S. dargestellt werden, also räumlich, ist hierdurch etwas Willkürliches eingeführt. Ein Beispiel: die einfachen, nur nach Höhe und Intensität verschiedenen, Tonempfindungen werden durch Puncte einer geraden Linie dargestellt, wobei die Intensität der Puncte der Intensität der Tonempfindungen entspricht. Soll nun diese sichtbar gemacht werden, so kann das durch Strecken geschehen, welche auf der geraden Linie, die die Tonhöhenempfindungen darstellt, senkrecht stehen. *In abstracto* jedoch sind die Strecken der Intensität wie der Höhe nicht räumlich, nicht Linien, sondern nur ausgedehnt, empfundene Dimensionen einer Mannigfaltigkeit.

nur eine Reihe von Qualitäten betrachtet, durch eine gerade Linie veranschaulicht werden. Auch die Qualität muss als continuirlich-veränderlich bezeichnet werden, wenn auch im Urtheil nur discrete Qualitäten vorkommen können. Denn zwischen zwei Temperaturempfindungen können auch dann, wenn die eine der anderen sich so genähert hat, dass sie ununterscheidbar sind, unmerklich verschiedene Grade eingeschoben gedacht werden, gleichwie zwischen zwei eben merklich ungleich hohen Tönen, unmerklich ungleiche Stufen eingeschoben werden können. Man kann sagen: Wenn man einen tiefen Ton hört und dann einen hohen, dass das Element der Empfindungsart (der Tonhöhenempfindung), nothwendig alle zwischenliegenden Grade durchläuft, die aber nicht beurtheilt werden. Denn was von der Intensitätsempfindung hinsichts der Unterscheidung der empfundenen Änderung von der (allein in das Urtheil tretenden) Grösse derselben, dem jeweiligen Grade, gesagt wurde, gilt ebenso von der Qualitätsempfindung. Auch hier messen die Urtheile jene Grösse und das Ergebniss ist immer eine bestimmte Qualität, ein bestimmter Fortschritt auf der Qualitätslinie, der durch eine begrenzte gerade Linie repräsentirt wird. Das Element ist hier wie dort nur dasjenige, was die stetige Änderung durchläuft, und die Verschiedenheit der durchlaufenen Zustände (Qualitätsgrade) wird durch die verschiedenen Lagen des Punctes gegeben, dessen Ortsänderung in der Geometrie die Linie gibt. Ferner gilt auch für die Qualität der Empfindung, dass das Element gesetzmässig und zwar in allen Momenten der Änderung der Qualität nach demselben Gesetz die Reihe der Zustände durchläuft, die es durchläuft. Die Gesetzmässigkeit ist auch in diesem Falle durch die Gleichheit der Richtung in der Änderung gegeben. Die einfache qualitative Empfindungsgrösse ist diejenige Grösse, welche durch eine in derselben Richtung erfolgende Änderung des erzeugenden Elementes entsteht. Sie wird erhalten dadurch, dass aus einem Element ein anderes ihm gleiches Element hervorgeht, dann aus diesem durch den gleichen Act der Änderung ein drittes gleiches Element und so fort. Dieses entspricht genau dem Begriff der Verstärkung, beziehlich der Ausdehnung des vorigen Paragraphen. Man nennt aber die Steigerung durch gesetzmässige Änderung des Elements hier nicht Verstärkung, sondern Erhöhung, und dieselbe in entgegengesetzter Richtung Vertiefung, wie es am deutlichsten im Tongebiet sich ausspricht. Aber auch im Farbengebiet ist es derselbe Begriff, welcher zu Tage tritt, wenn der Colorist sagt: diese Farbe steht zu tief oder zu hoch

gegen jene; und bei Temperaturen wird gleichfalls die Empfindung grosser Wärme als hoch der der niederen Temperatur als einer tiefen gegenübergestellt. Beim Geschmack oder Geruch ist diese Bestimmung nicht klar. Aber es widerspricht hier nichts der Einführung desselben Begriffs. In jedem Falle wird eine bestimmte Erhöhung, beziehlich Vertiefung im Tongebiete als eine Qualitätsstrecke zu bezeichnen sein, welche also ein Empfindungsgebilde erster Stufe ist, indem auch hier die Gesammtheit aller Elemente, welche durch Fortsetzung derselben und der entgegengesetzten Änderung erhalten werden, ein Empfindungssystem erster Stufe ausmacht. Diese Strecke wird gewöhnlich als Qualitätsunterschied (Tonhöhendifferenz) bezeichnet, ohne dass bis jetzt bewiesen wäre, ob sie auf einer Subtraction im eigentlichen Sinne in der Empfindung beruht oder etwa auf einem anderen wegnehmenden Acte. Auch ist nicht bestimmt, ob die Erhöhung der Qualität in der Empfindung auf eine Addition zurückzuführen sei. Wie bei den Intensitätsstrecken, so muss auch bei den Qualitätsstrecken stets die Richtung und Länge zugleich festgehalten werden. In Bezug auf beide sei schliesslich noch betont, dass wenn sie auch nur durch eine Änderung, eine Transferenz oder Verschiebung, zu Stande kommen, doch nicht das geringste Räumliche oder Zeitliche darin vorkommt; denn im Gebiete der reinen Empfindung an sich ist keine Zeit und kein Raum, es kann also die Änderung der Empfindung unmöglich auf einer Bewegung beruhen. Gerade wie in der abstracten Ausdehnungswissenschaft die Strecke zwar Ausdehnung, aber nicht nothwendig räumliche Ausdehnung, und die Änderung des Punctes nicht den empirischen Zeitbegriff erfordert, ist die Strecke in der Empfindungslehre raumlos und zeitlos und nur empfindbar, worüber im § 33 noch Einiges bemerkt werden wird, indem sich da zeigt, dass die Empfindungsänderung erst wenn man sie beurtheilt, d. h. in der Wahrnehmung, zeitlich und räumlich wird.

## DRITTER ABSCHNITT.

# Die Art der Verknüpfung von Intensität und Qualität in der Empfindung.

§ 7. Die Art der Verknüpfung zweier immer zusammen vorkommender veränderlicher Grössen lässt sich bestimmen, wenn man genau prüft, ob ihre Verbindung denjenigen Bedingungen genügt, welche für die eine und die andere Verknüpfungsart charakteristisch sind. Um daher zu finden, wie die Empfindungsintensitäten untereinander, die Qualitäten untereinander, und die Intensitäten mit den Qualitäten in der Empfindung und die e. r. Empfindungen untereinander verknüpft werden, müssen vorerst die Unterscheidungsmerkmale aller möglichen Verbindungsweisen beliebiger Grössen bekannt und auseinander in strenger Gliederung abgeleitet sein. Diese allgemein gültigen rein formalen Bestimmungen müssen in einem zusammenhängenden Ganzen vorliegen, um auf das Empfindungsgebiet angewendet zu werden. Ich fand nach vielen Bemühungen um eine solche Ableitung schliesslich in H. Grassmann's „Übersicht der allgemeinen Formenlehre" das Gesuchte für den vorliegenden Zweck vollständig und in bündigster Kürze dargestellt, so dass ich dieselbe den Ausführungen dieses Abschnittes zu Grunde lege, und den wesentlichen Inhalt der auf die allgemeinen Verknüpfungsgesetze bezüglichen Deductionen Grassmann's [1]) in die folgenden Paragraphen aufnehme, grossentheils in fast wörtlicher Transscription, da die „Ausdehnungslehre" Grassmanns von 1844 wenig verbreitet ist. Ich habe nur einige Ausdrücke durch bequemere Bezeichnungen ersetzt, so jedoch, dass in diesem Abschnitt das auf die rein formalen Verknüpfungen Bezügliche sachlich nicht mir, sondern Grassmann

1) Ausdehnungslehre 1844 S. 2 bis 11 und S. 13. Auch in dem vorigen Abschnitt sind bereits mehrere Gedanken aus diesem bewunderungswürdigen Buche für das in ihm nicht berührte Empfindungsgebiet verwerthet worden, wie der kundige Leser beim Vergleiche leicht herausfinden wird.

gehört, alle Anwendungen auf die Empfindungsvorgänge dagegen von mir allein herrühren.

§ 8. Der Begriff der Gleichheit und Verschiedenheit im Empfindungsgebiet ist zuerst festzustellen. Bei der Vergleichung zweier Empfindungen kann ausgesagt werden die Gleichheit hinsichts der Stärke oder hinsichts der Qualität oder hinsichts beider. Zwei Töne können nur gleichlaut, oder nur gleichhoch, oder gleichlaut und gleichhoch sein. Nur in dem letzteren Falle sind die zwei Töne gleich. Allgemein:

> Zwei Empfindungen sind nur dann und immer dann gleich, wenn die Intensität der einen gleich ist der Intensität der anderen und die Qualität der einen gleich ist der Qualität der anderen.

Gleich ist dasjenige von dem man in allen Stücken stets dasselbe aussagen kann, oder dasjenige was im Urtheil (ohne es zu ändern) sich gegenseitig vertreten kann [1]). Wenn also zwei Töne nur gleichhoch oder nur gleichlaut sind, sind sie nicht gleich. Wenn man aber sagt: die Höhe dieser zwei Töne ist gleich, so ist dem Begriff der Gleichheit vollkommen Genüge gethan, In diesem Begriffe, wie er hier formulirt ist, sind noch folgende zwei Sätze enthalten:

> Zwei Empfindungen, welche einer dritten gleich sind, sind auch einander gleich;
>
> Die aus gleichen Empfindungen auf dieselbe Weise erzeugten Empfindungen sind wieder gleich.

Unter Empfindungen sind in diesen zwei Sätzen Intensi-

---

1) Der Unterschied von „gleich“ und „identisch“, auch für die Empfindungslehre wichtig, wird von J. G. Grassmann (in seiner Abhandlung über den Begriff und den Umfang der reinen Zahlenlehre im Programm des Stettiner Gymnasiums 1827, 4°. S. 5) treffend erörtert: „Es kann keine Gleichheit ohne eine Ungleichheit gedacht werden. Auch in der Bildung der Zahl ist letztere unvertilgbar. 1 und 1 können nur dadurch als 2 verbunden werden, dass sie bei vollkommener Gleichheit doch auch wieder verschieden sind, weil sie sonst identisch sein würden und nur als Eins betrachtet werden könnten. Ebenso muss in der Ungleichheit nothwendig eine Gleichheit gedacht werden, wie schon daraus hervorgeht, dass die Ungleichheit in den combinatorischen Elementen ein gemeinschaftliches Prädicat ist, vermöge dessen man sie zählen kann. Ihre Gleichheit, das, worin sie übereinkommen, ist dann eben die Ungleichheit. Gleichheit und Ungleichheit sind nur Momente an dem zu verknüpfenden, und es kommt nur darauf an, welches von beiden Momenten als die der Synthesis zum Grunde liegende Bestimmung gilt, während stets beide vorhanden sind.“

tätsempfindungen oder Qualitätsempfindungen oder einfache reine Empfindungen zu verstehen.

§ 9. Thatsache ist, dass in jedem Sinnesgebiet eine Intensitäts- wie eine Qualitäts-Empfindung eine Steigerung erfahren, und eine einfache reine Empfindung in jedem ihrer Constituentien (Lichtstärke und Farbenstufe, Tonstärke und Tonhöhe, Druck und Temperatur) gesteigert werden kann. Diese Steigerung kommt dadurch zu Stande, dass bei der Intensität die vorhandene Strecke mit einer anderen hinzutretenden verknüpft wird; ebenso bei der Qualität, indem da die vorhandene Qualitätsstrecke mit einer anderen im Empfinden verknüpft wird. Bei der e. r. Empfindung kann die Steigerung nur durch die Intensitätszunahme oder nur durch die Qualitätszunahme oder durch beides zu Stande kommen. Ein Ton kann nur lauter, oder nur höher, oder lauter und höher werden. Wenn also in den zwei folgenden Sätzen Empfindung wieder sowohl Intensitäts- wie Qualitäts- wie e. r.- Empfindung bedeutet, hat man allgemein:

Werden gleiche Empfindungen um gleichviel gesteigert, so resultiren gleiche Empfindungen, und

Werden ungleiche Empfindungen um gleichviel gesteigert, so resultiren ungleiche Empfindungen.

Andererseits steht fest, dass in jedem Sinnesgebiet eine Intensitäts-, Qualitäts- und e. r. Empfindung eine Herabsetzung erfahren kann, indem nämlich die Steigerung rückgängig wird. Durch dieses Schwinden der Zunahme kommt die Empfindung der Abnahme der Intensität, der Qualität, der ganzen Empfindung zu Stande. Ein Ton kann nur leiser, oder nur tiefer, oder leiser und tiefer werden. Wird demnach das Wort „Empfindung" in derselben dreifachen Bedeutung wie oben gebraucht, so hat man unmittelbar:

Werden gleiche Empfindungen um gleichviel herabgesetzt, so resultiren gleiche Empfindungen;

Werden ungleiche Empfindungen um gleichviel herabgesetzt, so resultiren ungleiche Empfindungen.

Sowohl die Steigerung, sei es Verstärkung, sei es Erhöhung der Empfindung, wie die Herabsetzung, sei es Schwächung, sei es Vertiefung der Empfindung, heisst empfundene Änderung, nämlich empfundene Zunahme und empfundene Abnahme, und wenn die Änderung eine bestimmte Grösse erreicht hat, heisst sie (s. oben) eine Strecke, Intensitätsstrecke, Qualitätsstrecke. Die einfache reine Empfindungsstrecke wird also von zwei Graden der Intensität

und von zwei Graden der Qualität begrenzt. Da man nun sowohl die Intensitäten unter sich, wie die Qualitäten unter sich verknüpfen kann, ersteres auch wenn die Qualität constant, letzteres auch wenn die Intensität constant gedacht wird, so wird hiermit als dem einfachsten Fall zu beginnen sein, und zwar sollen zunächst nur Zunahmen miteinander verknüpft werden (bis zum § 13 einschliesslich).

Wenn zwei Grössen, Intensitäten, Qualitäten, e. r. Empfindungen, unter sich verknüpft sind, so heissen sie Glieder der Verknüpfung; diejenige Grösse, welche durch die Verknüpfung beider erhalten wird, das Ergebniss der Verknüpfung, und zwar ist hier zu unterscheiden in jedem Sinnesgebiet die Verknüpfung:

einer Intensität mit einer Intensität: diese gibt immer nur eine Intensität;

einer Qualität mit einer Qualität: diese gibt immer nur eine Qualität;

einer Intensität mit einer Qualität: diese gibt immer nur eine e. r. Empfindung;

einer e. r. Empfindung mit einer e. r. Empfindung: diese gibt eine neue Empfindung;

einer Intensität mit einer e. r. Empfindung: diese gibt eine neue Empfindung;

einer Qualität mit einer e. r. Empfindung: diese gibt eine neue Empfindung.

Die zwei ersten Fälle verknüpfen linear darstellbare Gebilde, die je unter sich mit derselben Einheit gemessen werden, die vier letzten nicht. Es ist zu beachten, dass die Intensität oder Stärke mit einer Einheit gemessen wird, auf welche die Einheit, mit der die Qualität gemessen wird, sich linear nicht reduciren lässt, und zu behalten, dass die e. r. Empfindung nur durch Knüpfung beider entsteht, also durch Knüpfung zweier Grössen, die verschiedene Einheiten haben.

Sollen nun zwei verknüpfte Glieder unterschieden werden, so heisst das eine das Vorderglied, das andere das Hinterglied. Als allgemeines Zeichen der Verknüpfung dient das Zeichen $\frown$; und zwar sollen die zu verknüpfenden Glieder, wenn es Intensitätsstrecken sind, durch $s_1$ $s_2$ $s_3$ $s_4$ bezeichnet werden, wenn Qualitätsstrecken durch $\alpha$ $\beta$ $\gamma$ und andere kleine Griechische Buchstaben, wenn einfache reine Empfindungen durch die kleinen Lateinischen Buchstaben a b c d, während die grossen Lateinischen Buchstaben beliebige Grössen ausdrücken. Sind nun A und B Glieder einer

Verknüpfung, A Vorderglied, B Hinterglied, so ist das Ergebniss der Verknüpfung $(A \frown B)$, indem die Klammer ausdrückt, dass die Verknüpfung nicht mehr nur in der Trennung ihrer Glieder empfunden wird, sondern als eine Einheit; was für eine Einheit, und wie diese zu Stande kommt, ergibt sich aus dem Verlauf der Untersuchung. Einige Beispiele seien zur Erläuterung eingeschoben. Es bedeutet in der Empfindung

$(s_1 \frown s_2)$ eine bestimmte Zunahme der Helligkeit, der Tonstärke, des Druckes;

$(\alpha \frown \beta)$ eine bestimmte Zunahme der Farbenstufe, der Tonhöhe, der Temperatur;

$(s_1 \frown \alpha)$ eine e. r. Empfindung, nämlich eine Farbe, einen Ton, eine Tastempfindung;

$((s_1 \frown \alpha) \frown (s_2 \frown \beta))$ zwei e. r. Empfindungen zusammenempfunden;

$(s_2 \frown (s_1 \frown \alpha))$ eine bestimmte Zunahme der Intensität einer e. r. Empfindung, z. B. das Hellerwerden einer Farbe, Lauterwerden eines Tones;

$((s_1 \frown \alpha) \frown \beta)$ eine bestimmte Zunahme der Qualität einer e. r. Empfindung, z. B. das Höherwerden eines Tones.

Das Zeichen $\frown$ bedeutet überall nichts weiter, als dass die dadurch verbundenen Empfindungsgebilde so miteinander verknüpft werden in der Empfindung, dass eine Zunahme empfunden wird. W i e ist nicht bestimmt. Es ist also namentlich noch unermittelt, ob in den angeführten Fällen das Zeichen $\frown$ nur éine Verknüpfungsart, oder mehr als eine bezeichnet, und ob es in allen Fällen dieselbe Verknüpfungsart bezeichnet. Die Beispiele zeigen ferner, dass das Ergebniss der binären Verknüpfung wieder mit anderen Grössen verknüpft werden kann, und so gelangt man zur Verknüpfung mehrerer Glieder, welche aber immer zunächst nur als eine Verknüpfung zweier erscheint, was die Klammern andeuten. Die äusseren Klammern können jedoch, ohne der Deutlichkeit Eintrag zu thun, in Ausdrücken, wie den eben gegebenen, fortgelassen werden, also ist $(s_2 \frown (s_1 \frown \alpha)) = s_2 \frown (s_1 \frown \alpha)$, wo das Gleichheitszeichen seine gewöhnliche Bedeutung hat.

§ 10. Die besondere Art der Verknüpfung wird nun ganz allgemein dadurch bestimmt, dass man prüft, welche Veränderungen man vornehmen kann, ohne dass das Ergebniss der Verknüpfung eine Änderung erleidet. Die einzigen Änderungen, welche vorgenommen werden können, ohne die einzelnen verknüpften Grössen

selbst zu ändern, sind aber Änderung der Klammern und Umordnung, d. h. Vertauschung der Glieder. Es werde zuerst die Änderung der Klammern betrachtet. Ist eine Verknüpfung von der Art, dass bei drei Gliedern das Setzen der Klammern keinen realen Unterschied im Ergebniss bedingt, also dass $A \frown (B \frown C) = A \frown B \frown C$, so folgt, dass auch in jeder mehrgliedrigen Verknüpfung dieser Art ohne Änderung ihres Ergebnisses, die Klammern weggelassen werden können. Denn jede Klammer schliesst vermöge der darüber festgesetzten Bestimmung (§ 9) zunächst einen zweigliedrigen Ausdruck ein, und dieser Ausdruck muss wieder als Glied verbunden sein mit einer anderen Grösse; es tritt also eine Verbindung von drei Grössen hervor, bei welcher das Weglassen der Klammern das Ergebniss nicht ändern soll; also wird auch, da statt jeder Grösse die ihr gleiche gesetzt werden kann, das Gesammtergebniss durch das Weglassen der Klammern nicht geändert. Also: „Wenn eine Verknüpfung von der Art ist, dass bei drei Gliedern die Klammern weggelassen werden dürfen, so gilt dies auch bei beliebig vielen.“ Oder, da in zwei Ausdrücken, welche sich nur durch das Setzen der Klammern unterscheiden, stets, nach dem soeben bewiesenen Satze, die Klammern weggelassen werden können (ohne Änderung des Ergebnisses), so sind beide Ausdrücke, da sie demselben (klammerlosen) Ausdruck gleich sind, auch einander gleich und der vorige Satz heisst etwas allgemeiner:

„Wenn eine Verknüpfung von der Art ist, dass für drei Glieder die Art, wie die Klammern gesetzt werden, keinen realen Unterschied bedingt, so gilt dasselbe auch für beliebig viele Glieder.“

Eine Verknüpfung dieser Art heisst eine associative Verknüpfung. Der Satz spricht das Gesetz der Associativität aus. Es fragt sich, ob dieses Gesetz für Empfindungsgebilde gilt.

§ 11. Erster Fall[1]). Verknüpfung von Intensitäten untereinander. Habe ich eine Helligkeitszunahmeempfindung $s_1$ und tritt zu ihr eine zweite $s_2$ hinzu, so dass die Empfindung stärker wird, so erhalte ich eine von beiden verschiedene empfundene Helligkeitszunahme $(s_1 \frown s_2)$. Tritt zu ihr eine weitere Helligkeitssteigerung $s_3$ hinzu, so entsteht wieder eine neue Helligkeitszu-

1) Überall wo im Folgenden ein erster, zweiter und dritter Fall unterschieden wird, bezieht sich der erste auf e. r. Empfindungen mit gleicher Qualität, der zweite auf solche mit gleicher Intensität, der dritte auf e. r. Empfindungen von ungleicher Intensität und Qualität.

nahmeempfindung und so fort. Die gesammte Helligkeitsänderung $(s_1 \frown s_2) \frown s_3$ ist nun in der Empfindung ganz dieselbe gleichviel ob ich zu $s_1$ die Zunahme $(s_2 \frown s_3)$ oder zu $(s_1 \frown s_2)$ die Zunahme $s_3$ hinzuempfinde, u. s. f. für viele hinzutretende Helligkeitssteigerungen. In beiden Fällen bleibt die Grösse der empfundenen Gesammtänderung, und damit die Endempfindung, d. h. das Ergebniss der Knüpfung der einzelnen an sich unveränderlichen Helligkeitsstrecken, dieselbe. Also besteht hier in der That eine associative Verknüpfung im Empfinden. Sie besteht aber ebenso für Tonstärken und Druckempfindungen, auf welche sich das Beispiel unmittelbar überträgt, indem, so lange nur die Empfindung der Steigerungen der Intensität in Betracht kommt, immer $s_1 \frown (s_2 \frown s_3) = (s_1 \frown s_2) \frown s_3$, und dieses für beliebig viele empfundene Zunahmen gilt. Also feststeht folgender Satz:

> Zunahmen der Empfindungsstärke um drei oder mehr Strecken liefern dieselbe Gesammtintensitätszunahme in der Empfindung und dieselbe End-Intensitäts-Empfindung, gleichviel ob zu der ersten und zweiten zusammenempfundenen Strecke die dritte u. s. w. tritt, oder zu der ersten die zweite und dritte verknüpft hinzutreten. Kürzer:
>
> Die Empfindung beliebig vieler Intensitätszunahmen desselben Sinnesgebietes ist associativ.

Zweiter Fall. Verknüpfung von Qualitäten untereinander. Habe ich die Empfindung des Accordes $c^1$ $e^1$ $g^1$ — wo der Exponent die eingestrichene Octave bezeichnet — so ist die Empfindung dieselbe — mag nun zur Empfindung der grossen Terz $c^1$ $e^1$ die Empfindung der Erhöhung von $e^1$ bis $g^1$, also die Empfindung des $g^1$ hinzugekommen sein, oder zur Empfindung des $c^1$ die Empfindung der Erhöhung von $c^1$ bis $g^1$ durch das Hinzutreten der kleinen Terz $e^1$ $g^1$. In beiden Fällen ist die Empfindung der Gesammterhöhung von $c^1$ bis $g^1$ und die resultirende Dreiklang-Empfindung dieselbe. Das Beispiel überträgt sich unmittelbar auf die Empfindung von Erhöhungen in der Farbenlinie und Temperaturlinie; also auch hier Associativität. Immer ist $\alpha \frown (\beta \frown \gamma) = (\alpha \frown \beta) \frown \gamma$.

Hieraus folgt der Satz:

> „Erhöhungen, d. i. Zunahmen der Empfindungsqualität, um drei oder mehr Strecken liefern dieselbe Gesammtqualitätszunahme (Gesammterhöhungsempfindung) und dieselbe End-Qualitäts-Empfindung, gleichviel ob zu der ersten und zweiten

zusammenempfundenen Strecke die dritte u. s. w. tritt, oder zu der ersten die zweite und dritte verknüpft hinzutreten. Kürzer:

Die Empfindung beliebig vieler Qualitätszunahmen desselben Sinnesgebietes ist associativ.

Dritter Fall. Verknüpfung einfacher reiner Empfindungen unter sich. Ein leises $c^I$ mit einem leisen $e^I$ verknüpft gibt, wenn ein lautes $g^I$ hinzutritt, dieselbe Accordempfindung, wie wenn zu dem leisen $c^I$ die schon verknüpften Töne, das leise $e^I$ und laute $g^I$ zusammen, hinzukommen. Dasselbe gilt für Farben- und Tastempfindungen. Immer ist, so lange nur die resultirende Empfindung — nach Hinzutreten einer e. r. Empfindung zu einer oder mehreren vorhandenen — in Betracht kommt, $a \frown (b \frown c) = (a \frown b) \frown c$. Also, wenn ich für diese Verknüpfung e. r. Empfindungen unter sich, bei denen die letzteren einstweilen unverändert gedacht werden, den Ausdruck Zusammenempfindung gebrauche (auch wenn ein solches Zusammenempfinden nur mit Zuhülfenahme räumlichen Auseinanderseins stattfinden kann):

Die Zusammenempfindung von drei oder mehr e. r. Empfindungen liefert dieselbe Empfindung einer Mehrheit von e. r. Empfindungen oder denselben Empfindungscomplex, gleichviel, ob zu den zwei ersten zusammenempfundenen e. r. Empfindungen die dritte, oder zu der ersten die zweite und dritte zusammenempfunden hinzutreten. Kürzer:

Das Zusammenempfinden beliebig vieler e. r. Empfindungen desselben Sinnesgebietes ist associativ.

§ 12. Die einzige Änderung, welche in einer Verknüpfung ohne die verknüpften Grössen selbst zu ändern, ausser der Änderung der Klammern, noch vorgenommen werden kann, ist die Umordnung der Glieder. Lassen sich die zwei Glieder einer Verknüpfung ohne Änderung des Ergebnisses miteinander vertauschen, und ist sonst nichts über die Art der Verknüpfung festgesetzt, so kann daraus keine neue Folgerung gezogen werden. Kommt aber diese Bestimmung zu der Associativität hinzu, so folgt, dass auch bei mehrgliedrigen Ausdrücken die Ordnung der Glieder für das Gesammtergebniss gleichgültig ist, da sich nämlich immer zwei aufeinanderfolgende Glieder vertauschen lassen. Man kann zwei Glieder, deren Vertauschbarkeit nachgewiesen werden soll, in Klammern einschliessen, ohne Änderung des Gesammtergebnisses, ferner diese Glieder unter sich vertauschen, ohne das Ergebniss der aus

ihnen gebildeten Verknüpfung zu ändern (wie soeben vorausgesetzt wurde), also auch ohne das Ergebniss der ganzen Verknüpfung zu ändern, da man statt jeder Grösse die ihr gleiche setzen kann, und endlich können die Klammern wieder so gesetzt werden, wie sie zu Anfang waren. Somit ist die Vertauschbarkeit zweier successiver Glieder bewiesen. Da man aber durch Fortsetzung dieses Verfahrens jedes Glied auf jede beliebige Stelle bringen kann, so ist die Ordnung der Glieder überhaupt gleichgültig. Also dieses Resultat zusammen mit dem des § 10 gibt den Satz:

„Wenn eine Verknüpfung von der Art ist, dass man, ohne Änderung des Ergebnisses, bei drei Gliedern die Klammern beliebig setzen, bei zweien die Ordnung ändern kann, so ist auch bei beliebig vielen Gliedern das Setzen der Klammern und die Ordnung der Glieder gleichgültig für das Ergebniss."

Eine derartige Verknüpfung heisst associativ und commutativ. Der Satz spricht zugleich das Gesetz der Associativität und Commutativität aus. Es fragt sich, ob eine solche Verknüpfung der Empfindungsgebilde vorkommt.

§ 13. Erster Fall. Intensitäten. Drei empfundene Helligkeitszunahmen $s_1$ und $s_2$ und $s_3$ geben dieselbe gesammte Zunahme und dieselbe Endempfindung, gleichviel in welcher Reihenfolge sie verknüpft werden, ob etwa $s_1 \frown s_2 \frown s_3$ oder $s_1 \frown s_3 \frown s_2$ oder $s_3 \frown s_1 \frown s_2$ oder $(s_1 \frown s_2) \frown s_3$ oder $(s_3 \frown s_1) \frown s_2$ und so fort. Drei Zunahmen der Tonstärke und drei Druckzunahmen, die empfunden werden, ebenso. Also für ein einzelnes Sinnesgebiet:

Die Empfindung einer Zunahme der Intensität um beliebig viele Strecken ist associativ und commutativ,

denn der Beweis (§ 12) für mehr als zwei Glieder gilt auch hier.

Zweiter Fall. Qualitäten. Ob ich von der Tonhöhe $a^{I}$ zu $c^{II}$, dann $e^{II}$ und $g^{II}$ aufsteige oder zuerst von $e^{II}$ zu $g^{II}$, dann von $a^{I}$ zu $e^{II}$, ist für die Empfindung der gesammten Erhöhung von $a^{I}$ bis $g^{II}$ gleichgültig. Auch für die Empfindung des Aufsteigens in der Farbenqualität und Temperatur gilt entsprechendes, da immer [1]) $\alpha \frown \beta \frown \gamma = \beta \frown \alpha \frown \gamma = \alpha \frown (\gamma \frown \beta) = (\gamma \frown \alpha) \frown \beta$ ist:

Die Empfindung einer Erhöhung der Qualität um beliebig viele Strecken ist associativ und commutativ.

---

1) Es ist zu beachten, dass die Buchstaben nur Strecken bedeuten, also im vorliegenden Beispiel $\alpha = a^{I} \cdot c^{II}$; $\beta = c^{II} \cdot e^{II}$ und $\gamma = e^{II} \cdot g^{II}$.

Dritter Fall. Einfache reine Empfindungen. Tritt zu einer Tonempfindung $c^{II}$ eine zweite $e^{I}$ und eine dritte $g^{I}$ hinzu, so ist es für das Zusammenempfinden der drei Töne, für die Empfindung des Accordes, irrelevant, ob zu $e^{I}$ etwa $c^{I}$ und dann $g^{I}$, oder zu $g^{I}$ die Töne $c^{I}$ und $e^{I}$ zusammen hinzutreten. Auch für Farben (so lange diese selbst als unveränderlich gedacht werden) und für Tastempfindungen gelten die Gleichungen, die das Ton-Beispiel erläutert:

$$a \frown b \frown c = b \frown a \frown c = c \frown a \frown b = (a \frown b) \frown c = b \frown (a \frown c) = (c \frown a) \frown b \text{ u. s. f.}$$

in Worten für ein einzelnes Sinnesgebiet:

Das Zusammenempfinden von zwei oder mehr einfachen reinen Empfindungen ist associativ und commutativ.

Bei diesen und den vorigen Sätzen sowie den folgenden (bis § 22 einschliesslich) ist festzuhalten, dass die verknüpften Glieder keine Änderung an sich selbst erfahren. Auch ist wohl zu beachten, dass wenn ein Nach- und Nebeneinander für das Zusammenempfinden erfordert wird, doch von jedweder etwa dadurch bedingten Empfindung oder Wahrnehmung, ausser der blossen Empfindung der Vermehrung oder des Zunehmens — bis hierher — und der blossen Empfindung der Verminderung oder des Abnehmens — in den folgenden Paragraphen — gänzlich abgesehen werden muss. Zunächst ist ausschliesslich der einfache Fall der blossen Zunahme in der Empfindung betrachtet worden.

§ 14. In den Fällen des § 11 und § 13 handelte es sich nur um die Verknüpfung von Intensitätszunahmen miteinander, von Qualitätserhöhungen (-zunahmen) miteinander und um die gleichfalls eine Zunahme (eine Vermehrung) herbeiführende Verknüpfung von e. r. Empfindungen miteinander. Diese Verknüpfungen erhalten jetzt den Namen thetische Operationen, im Gegensatz zu der nun zu discutirenden Sonderung, welche lytische Operation [1])

1) Die Ausdrücke „thetische“ und „lytische“ Operation hat Hankel (Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen. Leipzig 1867. S. 4—18 des ersten Theils — der zweite ist nicht erschienen —) eingeführt. Die Worte sind aber nur Abkürzungen der Bezeichnungen H. Grassmann's (1844): „synthetisches“ und „analytisches“ Verfahren, die zuerst J. G. Grassmann (der Vater) in seiner gedankenreichen Abhandlung über den Begriff und den Umfang der reinen Zahlenlehre im obigen Sinne gebrauchte (Programm des Stettiner Gymnasiums 1827. S. 17). Dieser bezeichnete auch das lytische Verfahren sehr treffend als ein regressives. Die Ausdrücke „associativ“ und „commutativ“ hat namentlich W. R. Hamilton in dem obigen Sinne ge-

heisst, und durch Umkehrung aus ihr hervorgeht. Auch sie kann eine Verknüpfung, nämlich die lytische Verknüpfung genannt werden. Allgemein bezeichnet eine lytische Operation im Empfindungsgebiet eine Herabsetzung, Herabstimmung, Abnahme, Schwächung, Vertiefung, Verminderung, Verkleinerung, während die thetische Operation, eine Steigerung, Emporstimmung, Zunahme, Verstärkung, Erhöhung, Vermehrung, Vergrösserung mit sich führt, indem die Lytik auf einem Wegnehmen oder Theilen, die Thetik auf einem Zufügen oder Vervielfachen beruht. Die thetische Operation realisirt sich also im Gebiete des Empfindens z. B. bei dem Hellerwerden der Farbe, dem Lauterwerden des Tones, aber auch beim Höherwerden desselben, dagegen die lytische Operation immer dann, wenn diese Zunahmen im Empfinden rückgängig werden, oder wenn die Empfindung verschwindet. Also die Thetik entspricht dem Entstehen und Zunehmen einer Empfindung, die Lytik dem Abnehmen und Verschwinden derselben. Jene ist im einfachsten Falle die Verknüpfung eines beliebigen Grades der Intensitäts- oder Qualitäts-Empfindung mit einem höheren Grade aufsteigend, diese die Verknüpfung eines beliebigen Grades mit einem tieferen Grade absteigend.

§ 15. Die lytische Operation besteht mathematisch gesprochen darin, dass man zu dem Ergebniss der thetischen Verknüpfung und dem einen Gliede derselben das andere sucht. Es gehören daher zu einer thetischen Verknüpfung zwei lytische Operationsweisen, je nachdem das Vorderglied oder das Hinterglied gesucht wird. Beide Verfahrungsarten liefern nur dann, dann aber stets, ein gleiches Ergebniss, wenn die thetische Verknüpfung commutativ ist. Im Folgenden ist zunächst die zu lösende thetische Verknüpfung associativ und commutativ. Sie wird nach wie vor durch $\frown$ bezeichnet, dagegen die entsprechende lytische Operation durch das umgekehrte Zeichen $\smile$, und zwar so, dass das Ergebniss der thetischen Operation, welches bei der lytischen gegeben

braucht. Den Deutschen mit ihnen identischen Grassmann'schen Bezeichnungen (1844) „Vereinbarkeit" und „Vertauschbarkeit", fehlen die erforderlichen eindeutigen Eigenschaftswörter, daher ich die Hamilton'schen Bezeichnungen vorziehe (Hamilton: *On Quaternions or on a new System of Imaginaries in Algebra* in dem *London and Dublin philosophical Magazine and Journal of science. Oct. 1844. Vol. 25, p. 245. 246,* wo auch der Ausdruck „distributiv" in dem unten (§ 26) gebrauchten Sinne vorkommt. Grassmann nennt das distributive Princip kurzweg „Beziehungsgesetz"). Nach Hankel hat J. F. Servois 1814 zum ersten Male die Ausdrücke commutativ und distributiv angewendet.

ist, hier zum Vorderglied wird. Sonach bezeichnet $A \smile B$ diejenige Grösse, welche mit B thetisch verknüpft A gibt, so dass also allemal $A \smile B \frown B = A$ ist. Hierin liegt, dass $A \smile B \smile C$ diejenige Grösse bedeutet, welche mit C und dann mit B thetisch verknüpft A gibt, also diejenige Grösse (nach § 12), welche mit denselben Werthen in umgekehrter Folge (mit B und dann mit C), oder auch mit $B \frown C$ thetisch verknüpft A gibt, das heisst $A \smile B \smile C = A \smile C \smile B = A \smile (B \frown C)$; und da dieselbe Schlussfolge für beliebig viele Glieder gilt, so folgt, dass auch die Ordnung der Glieder, welche lytische Vorzeichen haben, gleichgültig ist, und man diese Glieder, ohne Änderung des Ergebnisses, in eine Klammer schliessen darf, wenn man nur die in die Klammer rückenden Vorzeichen umkehrt. Hieraus folgt weiter, dass $A \smile (B \smile C) = A \smile B \frown C$. Denn man hat aus der Definition der lytischen Operation die Gleichung $A \smile (B \smile C) = A \smile (B \smile C) \smile C \frown C$, welcher Ausdruck vermöge des eben erwiesenen Gesetzes gleich ist $A \smile (B \smile C \frown C) \frown C$; und dieses wiederum ist vermöge der Definition der lytischen Operation $= A \smile B \frown C$, also auch der erste Ausdruck diesem gleich. Das ganze Resultat, mit dem vorher gewonnenen zusammen, lautet demnach:

„Wenn die thetische Operation associativ und commutativ ist, so ist es für das Ergebniss gleichgültig, in welcher Ordnung man thetisch oder lytisch verknüpft; auch darf man nach einem thetischen Zeichen eine Klammer setzen oder weglassen, wenn dieselbe nur thetische Glieder enthält, nach einem lytischen unter allen Umständen die Klammer setzen oder weglassen, sobald man nur in diesem Falle die Vorzeichen innerhalb der Klammer umkehrt, d. h. das lytische Zeichen in ein thetisches verwandelt und umgekehrt."

Jetzt fragt sich, inwieweit dieses Gesetz für Empfindungsgebilde gilt.

§ 16. Erster Fall. Intensitäten. Ist eine Helligkeitszunahmeempfindung durch thetische Verknüpfung zweier Zunahmen, die zu einer Anfangshelligkeit hinzutraten, erhalten worden, so kann immer, wenn die Gesammtzunahme der Intensität und eine der beiden Einzelzunahmen gegeben sind, durch Rückgängigwerden der Helligkeitssteigerung in der Empfindung, die andere Einzelzunahme erhalten werden. Auch erhält man stets die Anfangshelligkeit wieder, mag nun zuerst die eine und dann die andere Zunahme, oder zuerst eine dieser gleiche, dann eine jener gleiche rückgängig werden. Dasselbe gilt, wie einfache Überlegungen zei-

gen, auch für die Empfindung des Rückgängigwerdens oder Verschwindens von Zunahmen der Ton- oder Druck-Stärke. Die Empfindung der Gesammtabnahme bleibt dieselbe, wenn auch die Reihenfolge der Einzelabnahmen verändert wird. Immer ist $(s_1 \frown s_2 \frown s_3) \smile s_3 \smile s_2 = (s_1 \frown s_2 \frown s_3) \smile s_2 \smile s_3$ und nach dem Vorigen auch $= s_1 \frown (s_3 \frown s_2) \smile (s_3 \frown s_2) = (s_1 \frown s_3) \frown s_2 \smile s_2 \smile s_3$. Also:

> Wird die Empfindung einer Intensität in einem beliebigen Sinnesgebiet um zwei oder mehr Strecken rückgängig, so ist es für die empfundene Gesammtabnahme gleichgültig — und auch für die resultirende Endempfindung gleichgültig — in welcher Ordnung die einzelnen Strecken rückgängig werden.

Zweiter Fall. Qualitäten. Ist eine Tonhöhenzunahme-Empfindung $c^I\ g^I$ durch thetische Verknüpfung zweier Zunahmen $c^I\ e^I$ und $e^I\ g^I$ erhalten worden, so kann immer, wenn die Gesammterhöhung $c^I\ g^I$ und der Betrag einer der beiden Einzelerhöhungen, z. B. eine Erhöhung $= c^I\ e_I$, gegeben sind, der Betrag der anderen Einzelerhöhung, durch Rückgängigwerden der Erhöhung in der Empfindung, erhalten werden. Auch erhält man stets die Anfangsempfindung wieder, mag nun zuerst $e^I\ g^I$ und dann $c^I\ e^I$ oder zuerst eine Strecke $= c^I\ e^I$ von $g^I$ ab und dann eine $= e^I\ g^I$ rückgängig werden. Dasselbe gilt für das Rückgängigwerden von Fortschritten (Erhöhungsempfindungen) auf der Farbenqualitätslinie und leuchtet unmittelbar ein bei Temperaturempfindungen, wo die Thatsache noch deutlicher hervortritt, dass die Gesammtabnahme dieselbe bleibt (in der Empfindung), wenn auch die Reihenfolge, in der die Einzelabnahmen erfolgen, verändert wird. Ferner ist $\alpha \frown \beta \frown \gamma \smile \gamma \smile \beta = \alpha \frown (\gamma \frown \beta) \smile \gamma \smile \beta = (\alpha \frown \gamma) \frown \beta \smile (\beta \frown \gamma)$. In Worten:

> Wird die Empfindung einer Qualität in einem beliebigen Sinnesgebiete um zwei oder mehr Strecken rückgängig, so ist es für die empfundene Gesammtvertiefung gleichgültig — und auch für die resultirende Endempfindung gleichgültig — in welcher Ordnung die einzelnen Strecken rückgängig werden.

Dritter Fall. Einfache reine Empfindungen. Wenn drei Töne von ungleicher Stärke und Höhe $c^I\ e^I\ g^I$ zusammenempfunden werden, so kann jeder derselben durch Verschwinden der beiden anderen erhalten werden, und dabei ist es ganz gleichgültig, sowohl für die Gesammt-Empfindung des Verschwindens der zwei Töne, wie für die resultirende Empfindung, ob der eine oder der andere zuerst verschwindet. Entsprechendes gilt — immer noch

die Unveränderlichkeit der einzelnen Bestandtheile vorausgesetzt — für zusammenempfundene Farben und Berührungen. Immer ist $a \frown (b \frown c) \smile a \smile b = (c \frown b) \frown a \smile (b \frown a)$. In Worten:

> Verschwinden aus dem Zusammenempfinden von drei (oder mehr) e. r. Empfindungen eines beliebigen Sinnesgebietes zwei (oder mehr) e. r. Empfindungen, so ist es für die Empfindung der Verminderung gleichgültig — und auch für die resultirende Endempfindung gleichgültig — in welcher Ordnung die e. r. Empfindungen verschwinden.

Den drei letzten Sätzen in Betreff der lytischen Operation bei Intensitäten, Qualitäten, e. r. Empfindungen, muss nun noch der zweite Theil des allgemeinen Satzes des § 15, dessen Anwendung sie sind, beigefügt werden, nämlich:

> Es ist bei der thetischen und lytischen Verknüpfung von Intensitäten untereinader und von Qualitäten untereinander (Erhöhungen und Vertiefungen), sowie von e. r. Empfindungen untereinander für die Empfindung der gesammten Zu- oder Abnahme und für die resultirende Endempfindung gleichgültig, ob mehrere thetische Strecken vereinigt oder einzeln, beziehlich ob mehrere e. r. Empfindungen vereinigt oder einzeln auftreten und vereinigt oder einzeln wegfallen.

Dieser Satz ist nur eine Consequenz aus dem vorigen und der Thatsache, dass überhaupt die lytische Operation, ebensowohl wie die thetische, empfunden wird, was in diesem Paragraphen dargelegt wurde.

§ 17. Es wird nun zunächst in rein formaler Beziehung noch die Frage zu beantworten sein, ob eine Klammer, welche ein lytisches Zeichen einschliesst, und ein thetisches vor sich hat, wegbleiben kann, ohne Änderung des Ergebnisses.

Unschwer leuchtet ein, dass sie immer dann wegbleiben kann, wenn zu den vorigen Gesetzen die neue Bestimmung hinzutritt, dass das Ergebniss der lytischen Operation eindeutig sei, oder mit anderen Worten die Bestimmung, dass, wenn ein Glied der thetischen Verknüpfung unverändert bleibt, das andere aber sich ändert, dann auch jedesmal das Ergebniss sich ändert. Gilt diese Voraussetzung, so folgt zunächst, dass $A \frown B \smile B = A$ ist; denn $A \frown B \smile B$ bedeutet die Grösse, welche mit B thetisch verknüpft $A \frown B$ gibt. Nun ist A eine solche Grösse und vermöge der Eindeutigkeit des Resultats die einzige, also die Geltung der Gleichung bewiesen. Hieraus folgt weiter, dass $A \frown (B \smile C) = A \frown B \smile C$ ist. Denn es ist $B = (B \smile C) \frown C$ und dieser Ausdruck,

statt B in den zweiten Ausdruck (rechts) eingesetzt, gibt $A \frown ((B \smile C) \frown C) \smile C$. Dieses ist nach § 12 gleich $A \frown (B \smile C) \frown C \smile C$, und dieses nach dem soeben erwiesenen Satze $= A \frown (B \smile C)$, also der erste Ausdruck dem letzten gleich; und da man diese Schlussfolge für mehrere Glieder in der Klammer wiederholen kann, so resultirt der Satz:

„Wenn die thetische Operation associativ und commutativ und die entsprechende lytische eindeutig ist, so kann nach einem thetischen Zeichen die Klammer beliebig gesetzt werden oder wegbleiben."

Man nennt dann — wenn jene Eindeutigkeit ganz allgemein gilt — die thetische Verknüpfung Addition und ihr Ergebniss Summe, die zugehörige lytische Subtraction und deren Ergebniss Differenz.

Was die Ordnung der Glieder betrifft, so folgt, dass $A \frown B \smile C = A \smile C \frown B$ ist; denn $A \frown B \smile C = B \frown A \smile C = B \frown (A \smile C) = A \smile C \frown B$; so dass also auch die Vertauschbarkeit zweier Glieder, von denen eines ein thetisches, das andere ein lytisches Vorzeichen hat, nachgewiesen ist, sobald die Eindeutigkeit des lytischen Ergebnisses besteht. Nur unter dieser Voraussetzung gelten die Sätze dieses Paragraphen, während die des § 15 auch gelten, wenn das Ergebniss der lytischen Operation vieldeutig ist [1]).

---

1) Ich füge zur Erläuterung ein Zahlenbeispiel bei, um zu zeigen, dass wenn eine thetische Verknüpfung zwar associativ und commutativ, aber das Ergebniss ihrer Lysis nicht eindeutig ist, dann dieselbe nicht die additive sein kann. Bedeutet z. B. das Zeichen $\frown$ Multiplication, somit $\smile$ Division, dann ist, wenn ein Glied Null wird, die Eindeutigkeit der lytischen Operation nicht vorhanden, die thetische Verknüpfung kann aber associativ und commutativ bleiben: z. B. $\frac{3.2.0}{0} = \frac{0.(2.3)}{0} = \frac{2.(0.3)}{0}$ ist durch das algorithmische Symbol $\frac{0}{0}$ bezeichnet, welches jede beliebige Zahl ausdrückt, wogegen $3 + 2 - 0) + 0 = 2 + (0 - 0) + 3 = 0 + 2 + 3 - 0$ immer nur $= + 5$. Ebenso ist bei der thetischen Operation der Potenzirung die Eindeutigkeit des lytischen Ergebnisses nicht vorhanden, während doch die thetische Verknüpfung in einzelnen Fällen auch hier associativ und commutativ sein kann, z. B.: $\sqrt[4]{2^4} = \sqrt[4]{(4^2)} = \left(\sqrt[4]{2}\right)^4 = \left(\sqrt[4]{4}\right)^2 = + 2$ und $= - 2$, während $2 + 4 - 4 = (2 - 4) + 4 = 4 + (2 - 4) = - 4 + (2 + 4) = + (4 + 2) - 4$ immer nur $= + 2$ ist. In der associativen commutativen multiplicativen, also thetischen Verknüpfung $(4 . 2 . 0$ kann das eine Glied sich ändern, ohne dass das Ergebniss sich ändert, da $4 . 2 . 0 = 3 . 2 . 0$; in der thetischen associativen und commutativen Verknüpfung $(4^2)^2 = (2^2)^1 = (4)^{2^2} = (2^4)^2$ kann gleichfalls ein Glied paarweise ohne An-

§ 18. Dass nun in der That bei der bisher betrachteten associativen commutativen thetischen Verknüpfung der einfachen Empfindungsgebilde die Lysis eindeutig ist, liegt auf der Hand; denn nach dem Rückgängigwerden einer Zunahme oder Erhöhung bleibt die Intensität, beziehlich Qualität, welche die Zunahme, beziehlich Erhöhung, erfuhr, zurück und keine andere. Dasselbe gilt für das Verschwinden e. r. Empfindungen. Auch liegt diese Eindeutigkeit bereits in den Sätzen des § 16, sofern daselbst die resultirende Endempfindung schon als nur éine figurirt. Das Folgende bedarf also keiner Erläuterung durch Beispiele.

Erster Fall. Intensitäten:

Wenn in der Empfindung zweier Zunahmen der Intensität die eine sich verändert, die andere nicht, ändert sich allemal die Empfindung der Gesammtzunahme.

Also ist bewiesen, dass was bisher allgemein als eine Steigerung oder Zunahme und Herabsetzung oder Abnahme der Intensitätsempfindung bezeichnet wurde, additiv und subtractiv ist. Anfangs war unbekannt, wie zwei Intensitätsstrecken sich verknüpfen bei der Steigerung und Herabsetzung. Die Untersuchung zeigte erst, dass die Verknüpfung (in der Empfindung selbst) allen Bedingungen genügt, welche für die Charakteristik der Addition und Subtraction nothwendig und hinreichend sind. Wie also auch sonst noch die Empfindungsintensitäten miteinander verknüpft sein mögen, Intensitätssummen und Intensitätsdifferenzen im strengsten mathematischen Sinne haben eine reale Bedeutung in dem Empfinden der Zunahmen und Abnahmen der Empfindungsstärke an sich. Das Resultat lässt sich in folgenden Satz zusammenfassen:

Die Empfindung des Stärkerwerdens einer Empfindung beruht auf einem Acte der Addition, die Empfindung des Schwächerwerdens einer Empfindung auf einem Acte der Subtraction.

Zweiter Fall. Qualitäten. Hier gilt das Entsprechende, denn:

Wenn in der Empfindung zweier Erhöhungen der Qualität die eine sich verändert, die andere nicht, ändert sich allemal die Empfindung der Gesammterhöhung.

derung des Ergebnisses verändert werden, da z. B. $(-4)^{2^2} = (+4)^{2^2}$ und $((-2)^4)^2 = (+2)^{4^2}$ ist. Nur die Addition ist also eine associative commutative thetische Verknüpfung, deren Lysis eindeutig ist.

Was soeben von Intensitätsempfindungen gesagt wurde, überträgt sich unmittelbar auf Qualitätsempfindungen. Das Resultat ist:

Die Empfindung des Höherwerdens einer Empfindung (bei Farbenstufen, Tonhöhen, Temperaturen) beruht auf einem Acte der Addition, die Empfindung des Tieferwerdens (bei denselben Qualitäten) auf einem Acte der Subtraction.

Dritter Fall. Einfache reine Empfindungen. Auch hier dasselbe Resultat. Denn

Wenn beim Zusammenempfinden zweier e. r. Empfindungen (z. B. zweier Töne) die eine sich verändert, die andere nicht, so verändert sich das Zusammenempfinden,

was unmittelbar einleuchtet. Daraus folgt aber, im Zusammenhang mit dem bereits Dargethanen, der Satz

Das Zusammenempfinden mehrerer e. r. Empfindungen (Farben, Töne, Berührungen) beruht auf einem additiven Vorgang, die Empfindung des Verschwindens einer e. r. Empfindung, oder mehrerer, auf einem subtractiven Vorgang.

Somit wird, wenn zwei Intensitäts- oder zwei Qualitäts-Strecken oder zwei e. r. Empfindungen associativ und commutativ thetisch im Empfinden (also beim Entstehen einer jeden beliebigen Empfindung aus einer schwächeren Empfindung) so verknüpft werden, dass nach dem Verschwinden des Hinzugekommenen die Anfangs-Intensitäts-, -Qualitäts-Empfindung, und keine andere, übrig bleibt, statt des Zeichens $\frown$ das Pluszeichen $+$ in der gewöhnlichen Bedeutung zu setzen sein, und, wenn sie rückgängig werden, das Minuszeichen $-$ in der gewöhnlichen Bedeutung statt des $\smile$. Man hat für Intensitäten (Strecken oder empfundene Intensitätsunterschiede)

$$s_1 + s_2 + s_3 = (s_2 + s_1) + s_3 = (s_3 + s_1) + s_2$$
$$s_4 - s_5 + s_6 = s_6 - (s_5 - s_4) = s_6 + (s_4 - s_5);$$

für Qualitäten (Strecken oder empfundene Qualitätsunterschiede)

$$\alpha + \beta + \gamma = \beta + (\alpha + \gamma) = (\gamma + \beta) + \alpha$$
$$\delta - \varepsilon - \eta = \delta - (\varepsilon + \eta) = -\eta - (\varepsilon - \delta)$$

(z. B. wenn $\delta = c^I g^I$ und $\varepsilon = c^I e^I$, sowie $\eta = e^I g^I$, also $-\delta = g^I c^I$ u. s. w.); für e. r. Empfindungen beim Zusammenempfinden

$$a + b + c = (c + a) + b = (b + c) + a$$
$$d + (e + f) - d - e = (f + e) + d - (e + d).$$

In diesen drei Paaren von Gleichungen ist zugleich die Associativität, die Commutativität und die Eindeutigkeit der Lytik aus-

gedrückt, was in den früheren Paragraphen (bis § 16 einschliesslich) nicht der Fall ist. Aber auch hier wie dort ist streng festzuhalten, dass die einzelnen verknüpften Glieder an sich selbst nicht die geringste Veränderung erfahren, also namentlich das Zusammenempfinden mehrerer Töne zugleich, oder mehrerer Farben nebeneinander, nicht mit Intervall- und Misch-Empfindungen verwechselt werden darf. Durch das Addiren und Subtrahiren entstehen zwar neue Empfindungen, diese kommen aber hier nicht in Betracht, sondern nur die nächste Empfindung, nämlich die Empfindung des Hinzukommens und des Verschwindens (Rückgängig- oder Vermindertwerdens. Eine der wichtigsten Consequenzen davon ist diese: Gleich grosse Steigerung oder Herabsetzung des Minuendus und Subtrahendus ändert den Empfindungsunterschied nicht, z. B. sind die Tonhöhen $c^{I}$ $e^{I}$ um ebensoviel in der Empfindung voneinander verschieden, wie c e und $c^{II}$ $e^{II}$. Für die Sinnesreize aber gilt selbstredend der Satz nicht.

§ 19. Durch die lytische Operation gelangt man zur indifferenten und zur lytischen Grösse. Die erstere wird erhalten durch lytische Verknüpfung zweier gleicher Grössen; also $A \smile A$ stellt die indifferente Grösse dar, und zwar ist dieselbe unabhängig von dem Werthe A, weil $A \smile A = B \smile B$; denn $B \smile B$ stellt diejenige Grösse dar, welche mit B thetisch verknüpft B gibt, eine solche Grösse ist $A \smile A$, da $B \frown (A \smile A) = B \frown A \smile A = B$ ist. In dem Umfange nun, in welchem zugleich das Ergebniss der lytischen Operation eindeutig ist, muss daher auch $A \smile A = B \smile B$ sein. Da somit die indifferente Grösse unter der gestellten Bedingung (Eindeutigkeit des lytischen Ergebnisses) immer nur einen Werth hat, so ergibt sich die Nöthigung, sie durch ein eigenes Zeichen zu fixiren. Es sei für den Augenblick das Zeichen $\perp$, so ist $\perp \smile A = \smile A$. Dann soll $\smile A$ die rein lytische Grösse heissen, und zwar ist sie, wenn die thetische Operation die Addition war, die negative Grösse $-A$, während in diesem Fall die thetische Grösse $\frown A$ die positive Grösse $+A$ oder A heisst. Dass nun $A + \perp = A - \perp$, dass ferner $+(-A) = -A$ und $-(-A) = +A$ ist, ergibt sich direct, indem man die soeben dargestellten vollständigen Ausdrücke diesen Grössen substituirt, woraus sogleich die Richtigkeit dieser Gleichungen sich kundthut. Die indifferente Grösse $\perp$ in Bezug auf die Addition und Subtraction hat den Namen Null und das Zeichen 0.

§ 20. Die Anwendung dieser allgemeinen Bestimmungen auf die Empfindungsgebilde ist, solange es sich nur um den Unterschied Null in der Empfindung handelt, nicht schwierig.

Erster Fall. Intensitäten. Was bleibt, wenn von einer Intensitätszunahme-Empfindung eine der Zunahme gleiche thetische Strecke subtrahirt wird, ist nicht zweifelhaft. Es bleibt die vor dem Auftreten der ersten Zunahme vorhandene Intensitäts-Empfindung. Diese ist im Allgemeinen nicht Null. Wenn man jedoch erwägt, dass eine Intensitätszunahme nichts anderes bedeutet, als die Summe einer Anzahl (Strecken) Einheiten der wachsenden Empfindungsstärke, so leuchtet ein, dass durch Empfinden des Entstehens jener Summe und dann des Verschwindens (Rückgängigwerdens) derselben, allerdings die Anzahl von Null (Strecken) Einheiten der wachsenden Empfindungsstärke als Resultat des thetisch-lytischen Empfindungsvorganges übrig bleibt, d. h. die Intensitätszunahme Null. Hierbei kommt also die Null nicht als besonderes Constituens einer Intensitäts-Empfindung vor, sondern nur als Rest, wenn eine Steigerung auftritt, die wieder verschwindet, aber als ein Rest, welcher sich zu der jeweilig vorhandenen Intensität addirt, ohne sie zu ändern. Man kann nun diese Überlegung umkehren, und erhält dann die Intensitätsabnahme Null als Resultat der lytisch-thetischen Empfindungsoperation, bei der eine vorhandene Intensität abnahm, und dann um den Betrag der Abnahme wieder zunahm. So ergibt sich der Satz:

> Der thetische wie der lytische Intensitätsunterschied Null zu einer Intensitätsempfindung addirt oder von ihr subtrahirt, ändert dieselbe nicht.

Es werden also für die thetischen Empfindungsunterschiede (Zunahmen) die Ausdrücke positiv oder aufsteigend, für die lytischen (Abnahmen) die Ausdrücke negativ oder absteigend zu gebrauchen sein. Man hat allgemein für Intensitätsempfindungen, wenn $s_1$, $s_2$ Strecken und 0 die Strecke Null bedeutet,

$$s_1 + s_2 - s_2 = s_1 \pm 0 = s_1$$
$$s_1 - s_2 + s_2 = s_1 \mp 0 = s_1.$$

Zweiter Fall. Qualitäten. Wenn eine Qualitäts- (z. B. eine Tonhöhen-)Empfindung zunimmt, indem eine Anzahl Qualitäts-Strecken-(Einheiten) sich zu ihr addirt und dieselbe Anzahl dann von der neuen Tonhöhenempfindnug subtrahirt wird, so bleibt von dieser thetischen und lytischen Empfindungsoperation nur die Qualitätsstrecke — der Unterschied — Null, welche durch Addition zu oder Subtraction von der ursprünglichen Tonhöhenempfin-

dung keine Veränderung derselben herbeiführt. Auch sind also die Zunahmen in der Empfindung, d. h. die Erhöhungen, als positive oder aufsteigende, die Abnahmen, d. h. die Vertiefungen, als negative oder absteigende Qualitätsstrecken, oder Unterschiede der Qualitätsempfindung, zu bezeichnen, was ebenso für Farbenstufen und Temperaturen gilt:

> Der Qualitätsunterschied Null zu einer Qualitätsempfindung addirt oder von ihr subtrahirt, ändert dieselbe nicht.

Oder

$$\alpha + \beta - \beta = \alpha \pm 0 = \alpha$$
$$a - \beta + \beta = \alpha \mp 0 = \alpha$$

wo $\alpha$ und $\beta$, wie immer, Qualitätsstrecken.

Dritter Fall. Einfache reine Empfindungen. Kommt zu einem empfundenen Ton ein zweiter hinzu, welcher dann wieder verschwindet, so bleibt von dieser thetisch-lytischen Operation die Empfindungsänderung Null, welche von der ursprünglichen Empfindung subtrahirt oder zu ihr addirt werden kann, ohne sie zu ändern. Für jedes Sinnesgebiet hat man:

$$a + b - b = a \pm 0 = a$$
$$a - b + b = a \mp 0 = a$$

Man hat die Empfindung, dass nichts hinzugekommen, nichts weggenommen ist, was für das Zusammenempfinden und seine Lysis ganz allgemein gilt:

> Das Auftreten und Wiederverschwinden einer e. r. Empfindung gibt die Empfindung Null, die zu jeder beliebigen e. r. Empfindung addirt oder von ihr subtrahirt werden kann, ohne sie zu ändern.

Demnach wird das Empfinden beim Auftreten oder Entstehen einer Empfindung, d. h. also bei einer thetischen Empfindung, als ein positives, das Empfinden beim Verschwinden oder Rückgängigwerden, d. h. also bei einer lytischen Empfindung als ein negatives Empfinden zu bezeichnen sein, worin nichts Willkürliches liegt. Denn in dem Worte „negativ“ liegt nicht der Begriff des Verneinens oder Vernichtens schlechthin, sondern es hat überhaupt nur einen Sinn, wo das damit Bezeichnete ein Entgegengesetztes hat, welches mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleichkommt[1]). Gerade dieses aber trifft hier zu. Denn das Auftreten des Intensitäts-, Qualitäts-, Empfindungs-Unterschieds

1) Gauss hat bekanntlich den Begriff des Negativen in dieser Weise erklärt. Göttingische gelehrte Anzeigen. 64. Stück. 23. April 1831. S. 635.

Null ist, wie gezeigt wurde, gleichbedeutend mit der Vernichtung positiver (progressiver) Empfindungsvorgänge durch Vereinigung mit negativen (regressiven) Empfindungsvorgängen, und umgekehrt.

§ 21. Die Thatsache, dass im Empfindungsgebiete additive und subtractive Processe stattfinden, wurde bis hierher dadurch bewiesen, dass gewisse rein formale Verknüpfungsgesetze im Empfindungsact realisirt sind. Doch kann auf diese Art nicht ohne Weiteres die Verknüpfung der Intensität mit der Qualität zur e. r. Empfindung ermittelt werden, weil es sich hier um die Verknüpfung verschiedenartiger Gebilde handelt. Es ergibt sich aber aus der Erzeugung der Intensitäts- und Qualitäts-Empfindung durch gleichsinnige Änderung des Empfindungselements, welche in einem Acte (z. B. bei steigender Tonstärke und zugleich steigender Tonhöhe) sich realisirt, dass jene Verknüpfung nur die additive sein kann, so lange es sich eben nur um das Zusammenempfinden des Steigens der Intensität und der Qualität handelt. Denn auf dieses Zusammenempfinden der Zunahmen sind die obigen formalen Gesetze streng anwendbar, wie die folgende Deduction zeigt. Man denkt sich am besten dabei einen Ton, welcher zugleich an Stärke und Höhe um ein Bestimmtes wächst. Dann sind Intensitäts- und Qualitätszunahme, obzwar durch verschiedene Grundänderungen des Elements zu Stande kommend, doch gleichsinnig erzeugt, und beide werden so zusammenempfunden, dass sie eine Gesammtzunahme-Empfindung ausmachen, indem ihr beiderseitiger Inhalt, d. h. die Einzelsteigerungen, welche beide enthalten, in eins zusammenempfunden werden; und diese Gesammtzunahme-Empfindung ist eben in ihrer Eigenschaft als solche mit der intensiven und qualitativen Zunahme-Empfindung gleichsinnig erzeugt. Nun ist leicht zu zeigen, dass dieses Gesammtempfinden additiv ist. Denn es ist associativ und commutativ und seine Lysis eindeutig. Zunächst kann man die Einzelsteigerungen der Intensität, wie der Qualität beliebig zusammenfassen und beliebig vertauschen, weil sie dabei dieselben bleiben, und durch Zusammenfassen und Umordnen noch so vieler Einzelsteigerungen weder die gesammte intensive, noch die gesammte qualitative Steigerung, noch die gesammte Steigerungsempfindung verändert werden kann, denn alle die Einzelsteigerungen sind gleichsinnig erzeugt, und die Steigerung der Qualität gibt ebenso wie die Steigerung der Intensität, die Empfindung einer Steigerung. Die Eindeutigkeit der Lysis wird dadurch bewiesen, dass wenn in der Gesammtzunahme-Empfindung ein Theil der Zunahme, sei er intensiv, sei er qualita-

tiv, sich verändert, dann auch allemal die Gesammtzunahme-Empfindung sich verändert, was keiner Erläuterung bedarf. Es ist also in der That die Lysis eindeutig (nach § 17), somit die Verknüpfung einer Intensitätszunahme mit einer Qualitätszunahme zu einer Empfindungszunahme additiv und ihr Rückgängigwerden subtractiv. Da nun aber das Zustandekommen jeder e. r. Empfindung, wenn noch keine Empfindung da ist, nur durch eine Intensitätszunahme und Qualitätszunahme zusammen möglich ist, so ist überhaupt das Zusammentreten von Intensität und Qualität zur e. r. Empfindung eine Addition. Es gelten also für diese Verknüpfung alle die entwickelten formalen Gesetze.

Wendet man diese Überlegung nur auf das Empfinden zweier Intensitätszunahmen mit der Qualitätszunahme Null oder zweier Qualitätserhöhungen mit der Intensitätszunahme Null, jede für sich, an, so ergibt sich das entsprechende Resultat, dass es nämlich, soweit nur die Zu- (und Ab-)nahme empfunden wird, additiv und subtractiv ist, also alle die formalen Bestimmungen gelten für positive und negative Glieder, die durch Fortsetzung einer Erzeugungsweise erhalten werden. Bezeichnet man daher die positiven und negativen Intensitäts-, Qualitäts-Änderungen als in entgegengesetztem Sinne erzeugt, und fasst man beide, weil sie denselben Gesetzen unterworfen sind, als gleichartige Empfindungsgrössen zusammen, so ist also der allgemeine reale Begriff der Addition und Subtraction für gleichartige Empfindungsgrössen überhaupt gültig, und es fragt sich jetzt, inwieweit seine Consequenzen im Empfindungsgebiet verwirklicht sind.

§ 22. Von diesen Consequenzen ist eine, der Unterschied Null in der Empfindung, schon erörtert, auch eine andere, nämlich die Existenz lytischer Grössen als negativer Empfindungsvorgänge (§ 20) sicher dargethan, aber eine dritte damit nothwendig zusammenhängende Folgerung, dass es einen Intensitätsgrad Null und einen Qualitätsgrad Null und jenseit desselben noch etwas Negatives geben muss, scheint eine eigenthümliche Schwierigkeit herbeizuführen. Denn wenn von einer gegebenen positiven Intensitätsempfindung soviel subtrahirt wird, als sie selbst beträgt, so bleibt die Intensität Null übrig, und wenn dieses negative Empfinden über den Nullpunct fortgesetzt gedacht wird, erhält man negative Intensitäten. Für Qualitäten gilt Entsprechendes. Kommt nun diesen vom allgemeinen Additionsbegriff geforderten negativen Empfindungsgebilden eine physiologische Bedeutung zu?

Erster Fall. Negative Intensitäten. Jeder positive In-

tensitätsgrad ist der Endpunct einer positiven Intensitätsstrecke, der Anfangspunct einer daran grenzenden zweiten positiven Intensitätsstrecke und zugleich der Endpunct einer negativen Intensitätsstrecke und der Anfangspunct einer zweiten Intensitätsabnahme. Ein Intensitätsgrad Null wird nun dadurch von jedem positiven Intensitätsgrad abweichen, dass er zwar Anfangspunct einer Zunahme, Endpunct einer Abnahme, aber nur Endpunct einer Zunahme $=0$ und nur Anfangspunct einer Abnahme $=0$ sein kann. Wenn er also auch mit einer Qualität verbunden vorkommt, so wird doch keine Empfindung von ihm existiren können, weil eine Intensitätszunahme Null (nach § 20) keine Intensitätsempfindung gibt. Gibt es somit einen Intensitätsgrad Null, so kann er nur dann vorhanden sein, wenn überhaupt keine Intensitäts-Empfindung (in dem betreffenden Sinnesgebiet) vorhanden ist. Ein solcher Zustand scheint in der That im Augenblick nach dem normalen Einschlafen und im Augenblick vor dem normalen Erwachen eines Sinnesgebietes gegeben und immer dann vorhanden zu sein, wenn die Intensität eben noch nicht oder eben nicht mehr beurtheilt wird. Denn wenn das Urtheil aufhört, hat die positive Intensität bis Null abgenommen (regressiv); die Zunahme derselben ist Null (sonst würde kein Einschlafen des betreffenden Sinnesgebietes eintreten), die Abnahme gleichfalls Null, denn man empfindet im Augenblick des Einschlafens oder Abwendens der Aufmerksamkeit von einem Sinnesgebiet nichts, also auch keine Abnahme der Intensität. Da aber unstreitig das Beurtheilen der Intensität (wie das Erwachen) nicht jedesmal gleich leicht eintritt, sondern durch (progressive) Annäherung an eben diesen Nullpunct von der entgegengesetzten Richtung, d. h. Verminderung des Abstandes von der kleinsten positiven Intensität, so entsteht die Nöthigung den Intensitätsgrad Null im Augenblick vor dem Erwachen (In-das-Urtheil-treten einer Empfindung oder In-das-Bewusstsein-treten eines Sinnesgebietes) als Endpunct einer Zunahme der Empfindungsintensität jenseit Null entstanden zu denken, d. h. die Intensitäten müssen nach Abwendung der Aufmerksamkeit von einem Sinnesgebiet negativ sein (es fehlt etwas an der Intensitätsempfindung), und dadurch, dass sie sich (progressiv) der Null nähern, wird ebenso der Nullpunct der Empfindungsintensität beim Erwachen erreicht, wie beim Einschlafen dadurch, dass die positiven Intensitäten des wachen Zustandes (regressiv) abnehmen, indem sie von der anderen Seite durch die Null gehen. Eine negative Intensität kann demnach niemals Gegenstand der Aufmerksamkeit, d. h. des

Urtheils werden, weil dieses erst bei positiven Werthen der Intensität auftritt. Geradewie — um ein vorzügliches Beispiel Fechner's anzuführen[1]) — Schulden negatives Vermögen sind, welche mit gleich grossen Summen an Geldbesitz vereinigt erst den Vermögensstand Null geben, geben die negativen Intensitäten im Unbewusstsein (wenn die Aufmerksamkeit abgelenkt ist) mit den positiven des wachen (urtheilenden) Zustandes vereinigt gedacht, die Intensität Null, d. h. aber: durch algebraische Summirung des Abstandes jenseit Null und diesseit Null tritt, wenn letzterer gross genug ist, (in jedem einzelnen Sinnesgebiet) Erwachen ein, die Aufmerksamkeit tritt über die Schwelle, die Intensität der Empfindung tritt in das (Wahrnehmungs-)Urtheil. Das Vorstehende genügt, um wenigstens die Möglichkeit der realen Bedeutung des Nullpunctes der Intensität und der negativen Intensitäten darzuthun. Es wird in dieser Weise die Continuität der gesammten Empfindungssphäre, des Bewusstseins und Unbewusstseins, hergestellt; und man kann sagen, dass jeder Empfindungsintensitätsgrad einen gewissen Abstand vom Nullpunct des Daseins der Intensität im Urtheil, d. h. vom Intensitätsgrad Null (im Augenblick des Erwachens eines Sinnes) an gerechnet, darstellt, was für die Ordnung der Empfindungen wichtig ist.

Zweiter Fall. Negative Qualitäten. Jeder positive Qualitätsgrad (Tonhöhe) ist der Endpunct einer positiven Strecke (Erhöhung), Anfangspunct einer zweiten positiven Strecke (weiterer Erhöhung) und zugleich der Endpunct einer negativen Qualitätsstrecke (Vertiefung), sowie der Anfangspunct einer zweiten solchen Strecke (weiterer Vertiefung). Der Qualitätsgrad Null wird nun dadurch von jedem positiven Qualitätsgrade abweichen, dass er zwar Anfangspunct einer Zunahme (Erhöhung), Endpunct einer Abnahme, aber nur Endpunct einer Zunahme $= 0$, und Anfangspunct einer Abnahme $= 0$ sein kann. Eine Empfindung von ihm kann nicht in das Urtheil treten. Denn z. B. der tiefste Ton hat noch immer eine gewisse Tonhöhe. Er entspricht keineswegs der Qualität Null. Aber es ergibt sich hieraus die Bedeutung der negativen Qualitäten. Denn man braucht nur in der vorigen Deduction (Erster Fall) überall statt „Intensitäten" zu setzen „Qualitäten" und statt „Intensitätsgrade" „Qualitätsgrade" und etwa statt „Zunahme" „Erhöhung", sowie statt „Abnahme" „Vertiefung", so stellt sich heraus, dass die negativen Empfindungsqualitäten

1) Elemente der Psychophysik. Leipzig 1860. I, S. 17. II, S. 39.

(Farbenstufen, Tonhöhen, Temperaturen) die Entfernung der Empfindungsqualität vom Nullpunct ihres Daseins im Urtheil bedeuten. Dieser Nullpunct selbst muss immer dann durchlaufen werden, wenn die Aufmerksamkeit in einem Sinnesgebiete über oder unter die Schwelle tritt, also z. B. bei Wendung der Aufmerksamkeit von einem Sinnesgebiete auf ein anderes.

Der Qualitätsnullpunct und der Intensitätsnullpunct sind also real, sofern beide realisirt sind, wenn eine Empfindung im Moment des Entstehens oder Verschwindens, d. h. auf der Schwelle ist. Falls eine Intensität verschieden von Null im Urtheil ist, kann die Qualität noch negativ, d. h. unempfunden, weil nicht beurtheilt, sein. Sie ist dann unbewusst. Ist die Intensität positiv und die Qualität jenseit des Qualitätsnullpunctes also negativ, so ist der Fall realisirt, wo zwar die Stärke, nicht aber die Art der Empfindung beurtheilt wird, also der Fall: ich empfinde eine Helligkeit, ohne die Farbe zu beurtheilen, ein Lautes ohne Tonhöhe u. s. f. Wenn dagegen sowohl die Intensität, wie die Qualität negativ ist, dann ist gar keine Empfindung im Urtheil, wie z. B. im traumlosen Schlaf. Wird endlich die Intensität allein negativ, so resultirt der Fall, wo nur die Qualität Gegenstand der Aufmerksamkeit ist, ein Fall, welcher vielleicht im Traume, jedenfalls im Gebiete des Berührungssinnes sich verwirklicht, indem da ohne Rücksicht auf Druck die Temperatur beurtheilt werden kann.

Noch eine Bemerkung ist nöthig, um den Schein einer Willkür zu beseitigen. Man könnte nämlich sagen, da die Intensitätsempfindung stark oder schwach ist, so müsse es einen Punct geben, wo sie weder stark noch schwach sei, und dieser sei der Indifferenzpunct oder Intensitätsnullpunct. Dies trifft aber darum nicht zu, weil ein solcher Punct doch immer eine positive Intensität hat, der auch beurtheilt wird. Alle diejenigen Intensitätsempfindungen heissen schwach, welche im Lichtgebiet dem Schwarz näher stehen als dem Hellsten (Weiss), im Schallgebiet der Stille näher als dem Lautesten. Nun ist aber das Dunkle doch immer noch von einer gewissen Helligkeit und das Leise von einer gewissen Lautheit, also immer positiv. Geradeso bei Qualitäten, wo tiefe Farben (Roth), tiefe Töne, tiefe Temperaturen doch immer eine gewisse Höhe haben. In dieser Beziehung verhalten sich die Empfindungsintensitäten, nicht weniger als die Empfindungsqualitäten, wie die Zahlen[1]). Denn in der Reihe der positiven Zahlen

1) Vgl. Hering a. a. O. (über den Licht- und Farbensinn).

von 0 bis $\infty$ liegt die 1 in der Mitte. Zwischen ihr und 0 sind ebensoviele kleine Zahlen (echte Brüche) wie grosse zwischen 1 und $\infty$ (unechte Brüche). Jene sind diesen reciprok (vgl. § 41).

§ 23. Nachdem festgestellt worden, welche Bedeutung die Addition und Subtraction der Empfindungsgebilde, als reale Vorgänge, haben, ist zu untersuchen, welche andere thetische Verknüpfungen im Empfindungsgebiete etwa vorkommen. Ein Gleichniss soll zunächst für die Verknüpfung der Intensität mit der Qualität das Vorhandensein von zwei verschiedenen thetischen Verknüpfungen erläutern. Wenn man ein gewisses Gewicht Schwefel in sehr kleinen Stücken und ein gewisses Gewicht Eisen gleichfalls in sehr kleinen Stücken in ein Gefäss bringt, so dass das Eisen unten, der Schwefel oben liegt, so bleibt das Gesammtgewicht Eisen und Schwefel dasselbe, wenn dieser unten, jenes oben zu liegen kommt. Wenn dann beide durcheinander gemengt werden, so ändert sich gleichfalls das Gesammtgewicht nicht, indem sich weder das Gewicht des Schwefels, noch das des Eisens ändert; und wenn ein gewisses Gewicht Schwefel oder Eisen fortgenommen wird, so ändert sich das Gewicht des Ganzen (um den Betrag des Fortgenommenen) d. h. die thetische Verknüpfung des Eisen- und Schwefel-Gewichts ist associativ und commutativ und ihre Lysis eindeutig; diese *mechanische* Verknüpfung ist also die Addition. Geradeso die Intensität und Qualität, welche zu einer e. r. Empfindung thetisch verknüpft werden (§ 21). Man braucht nur sie aus ihren Einheiten zusammengesetzt zu denken, um im Übrigen wie in dem Beispiel zu verfahren, wo die beiden componirenden Gewichte die Intensitäts- und die Qualitäts-Empfindung bedeuten, das Gesammtgewicht die Summe der Empfindung beider. Wenn nun jenes Gemenge von Eisen und Schwefel erwärmt wird, so tritt etwas Neues ein: weder das Eisen, noch der Schwefel sind als solche mehr da, wohl aber das Gesammtgewicht unverändert, auch die beiden componirenden Gewichte an sich unverändert; aber dadurch, dass sich Schwefeleisen gebildet hat, ist eine zweite engere thetische Operation vollzogen worden zwischen Eisen und Schwefel, nämlich die *chemische* Bindung; Eisen und Schwefel sind jetzt in anderer Weise als vorher vereinigt. Das eine hat auf das andere *eingewirkt* und eine Änderung der *gegenseitigen Lage* der Theilchen herbeigeführt. Entsprechend die Empfindung, z. B. einer Farbe. Wenn ich nicht mehr blos in einer Farbe die Intensität und Qualität jede für sich beachte, sondern beide zusammen, d. h. aber nicht mehr neben-

einander, sondern ineinander, so werde ich mir einer neuen Empfindung bewusst, nämlich der Sättigungsempfindung, welche einer Intensität allein, wie einer Qualität allein fremd ist. Um sie zu haben, reicht also die additive Verknüpfung nicht aus. Dass aber dabei eine thetische Verknüpfung neuer Art vorliegt, ist klar; denn man hat die Intensität mit der Qualität in neuer Weise in der Empfindung der Sättigung vereinigt, ohne dass die Summe beider in der Empfindung geändert würde. Eine ähnliche Betrachtung kann man auf das Zugleich-Empfinden mehrerer sehr ungleicher Intensitäten, und ebenso auf das Zugleich-Empfinden mehrerer sehr ungleicher Qualitäten anwenden, was aber schon eine räumliche oder zeitliche Sonderung erfordert. Denn da wird durch das Hinzukommen des einen Gliedes zu dem anderen nicht allein die Summe beider empfunden, sondern es tritt die neue Empfindung des Contrastes auf. Und bei mehreren discreten e. r. Empfindungen combiniren sich die Sättigungs- und Contrast-Empfindungen mit den Summen-Empfindungen. Und zwar ist die Empfindung des Contrastes in jedem Sinnesgebiet doppelter Art, je nachdem sie sich nur auf Intensitäten bei gleicher Qualität, oder nur auf Qualitäten bei gleicher Intensität bezieht. Zwei e. r. Empfindungen desselben Sinnesgebietes und von ungleicher Intensität, sowie von ungleicher Qualität, geben also beide Arten von Contrastempfindung, die ich als intensiven und qualitativen Contrast bezeichne. Dass beide thetischer Natur sind, ist schon darum gewiss, weil mit der Contrastempfindung eine Hebung verbunden ist, die aber die Summe der Intensitäts- und Qualitätseinheiten nicht ändert.

§ 24. Die thetische Verknüpfung, welche nicht additiv sein soll, muss ihrem Begriff nach durch die Addition bestimmt sein. Diese Begriffsbestimmung hängt von der Art ab, wie ein Ausdruck, welcher beide Verknüpfungsweisen enthält, ohne Änderung des Gesammtergebnisses umgestaltet werden kann. Die einfachste Art, wie in einem Ausdrucke beide Verknüpfungen vorkommen können, ist die, dass das Ergebniss der einen Verknüpfung der zweiten unterworfen wird; also wenn $\frown$ und $\approx$ die Zeichen der beiden Verknüpfungen sind, so hängt das Verhältniss beider von den Umgestaltungen ab, welche mit dem Ausdruck $(A \frown B) \approx C$ vorgenommen werden dürfen. Wenn sich die zweite Verknüpfung auf beide Glieder der ersten gleichmässig beziehen soll, so bietet sich als die einfachste Umgestaltung die dar, dass man jedes Glied der ersten Verknüpfung der zweiten unterwerfen, und dann diese

einzelnen Ergebnisse als Glieder der ersten Verknüpfungsweise setzen könne. Kann diese Umgestaltung ohne Änderung des Gesammtergebnisses vorgenommen werden, ist also $(A \frown B) \asymp C = (A \asymp C) \frown (B \asymp C)$, so heisst die zweite Verknüpfung die jener ersten entsprechende Verknüpfung nächst höherer Stufe. Sind insbesondere in ihr beide Glieder auf gleiche Weise abhängig von der ersten Verknüpfung, so dass also jene Bestimmung sowohl für das Vorderglied wie für das Hinterglied der neuen Verbindung gilt, und ist ferner die erstere Verknüpfung associativ und commutativ und ihre Lysis eindeutig, so heisst die neue Verknüpfung die Multiplication und ihr Ergebniss Product. Jene erste Verknüpfung dagegen ist als die Addition erwiesen und heisst nun Verknüpfung erster Stufe. Das Zeichen der Multiplication ist der Punct. Obige Gleichung lautet also $(A + B) . C = A . C + B . C$, wenn vorläufig von allen näheren Bestimmungen abstrahirt wird.

Es soll nun die Anwendbarkeit dieses allgemeinsten Multiplicationsbegriffs auf die Empfindung erörtert werden.

§ 25. Zuvor nur einige Bemerkungen über Contrastempfindungen.

Erster Fall. Intensiver Contrast. Wenn ich zwei Intensitätsgrade, z. B. Weiss und Grau nebeneinander habe — die Zuhilfenahme des Räumlichen schliesst diesen Fall aus der reinen Empfindung aus — so wird zunächst das Hinzutreten des Grau zum Weiss, nach dem Vorigen, als ein additives empfunden, ausserdem aber erscheint jetzt das Weiss gehoben durch intensiven Contrast. Es ist eine neue, eine Gegensatz-Empfindung aufgetreten; durch das Grau ist also das Weiss verändert worden. Nimmt man nun an, es sei diese Hebung durch einen multiplicativen Vorgang zu Stande gekommen, indem das Grau auf das Weiss eingewirkt hat, so muss jeder Theil des Grau jeden Theil des Weiss heben und die Summe aller dieser Einzel-Hebungen der Gesammthebung gleich sein, d. h. es muss für die Grösse der Hebung keinen Unterschied machen, ob ein zerstückt gedachtes Weiss von dem ebenso zerstückt gedachten Grau gehoben wird und alle die Hebungen zusammenempfunden werden, oder ob die Hebung des vereinigten Weiss durch dasselbe vereinigte Grau zu Stande kommt. Dass dieses der Fall ist, scheint fast selbstverständlich.

Zweiter Fall. Qualitativer Contrast. Eine mit der obigen parallele Überlegung, wo man nur statt Weiss etwa Grün und statt Grau Roth zu setzen hat, führt zu demselben Ergebniss, dass näm-

lich der Annahme die Hebung durch qualitativen Contrast könne auf einem Multiplicationsvorgang beruhen, nichts widerspricht.

Dritter Fall. Empfindungsproducte. Aus der Annahme, dass die Hebung durch intensiven wie durch qualitativen Contrast auf einem Multiplicationsacte beruhe, lässt sich folgern, dass die aus beiden combinirte Contrastempfindung, vermöge welcher eine vollständige (Farben-, Ton-, Tast-)Empfindung durch eine andere gehoben wird, die Summe der Producte des ersten und des zweiten Falls sei. Hier sind jedoch weniger complicirte Vorgänge ohne Zuziehung des Raums zu ermitteln, und zu diesem Behufe wird zunächst die Haupteigenschaft der multiplicativen Verknüpfung rein formal darzulegen sein.

§ 26. Die Beziehung der Multiplication zur Addition wurde dahin bestimmt, dass

$$(A+B)C = AC+BC$$
$$C(A+B) = CA+CB$$

ist. Diese Gleichungen drücken die distributive Eigenschaft der Multiplication aus, durch welche ihr Begriff festgestellt ist. Durch wiederholte Anwendung dieses Grundgesetzes gelangt man zu dem allgemeineren Satze, dass, wenn beide Factoren zerstückt sind, jedes Stück des einem mit jedem Stück des anderen multiplicirt werden kann und die Producte addirt werden können. Hieraus ergibt sich für die Beziehung der Multiplication zur Subtraction ein entsprechendes Gesetz, nämlich zunächst dass

$$(A-B)C = AC-BC$$

ist. Denn setzt man in dem zweiten Ausdruck (rechts) statt A das ihm gleiche $(A-B)+B$, so resultirt $AC-BC = ((A-B)+B)C-BC$; dieser neue Ausdruck ist nach dem eben formulirten distributiven Gesetze $= (A-B)C+BC-BC$ und dieses (nach § 17) gleich dem Ausdruck $(A-B)C$, folglich die Gleichheit des ersten und zweiten Ausdrucks bewiesen. Ebenso ergibt sich, wenn der zweite Factor eine Differenz ist, das entsprechende Gesetz. Durch wiederholte Anwendung dieser Gesetze erhält man den allgemeineren Satz:

„Wenn die Factoren eines Productes durch Addition und Subtraction gegliedert sind, so kann man ohne Änderung des Gesammtergebnisses jedes Glied des einen mit jedem Gliede des anderen multipliciren und die so erhaltenen Producte durch vorgesetzte Additions- oder Subtractions-Zeichen verknüpfen, je nachdem die Vorzeichen ihrer Factoren gleich oder ungleich waren."

§ 27. Um zu erläutern, wie diese allgemeinste Multiplication

im Empfindungsgebiet verwirklicht ist, muss ich an einige Thatsachen aus der Sinnesphysiologie erinnern. Sie betreffen Farben- und Tonempfindungen.

Eine Farbenempfindung ohne alle Helligkeits- oder ohne alle Qualitätsempfindung kommt nicht vor. Verschafft man sich nun eine beliebige Farbenempfindung mit sehr deutlicher Qualität und lässt man in dieser die Intensität zunehmen, so verändert sich dadurch zugleich die Qualität, indem sie mit zunehmender Stärke weisslicher, schliesslich weiss wird. In diesem Falle nimmt also die Empfindung der Intensität zu auf Kosten der Qualitätsempfindung. Helmholtz[1]) hat bekanntlich zuerst die merkwürdige Thatsache festgestellt, dass jede Farbenempfindung bei gesteigerter Intensität in Weiss übergeht; dies gilt auch für Roth, wenn die Intensität genügend gesteigert wird[2]). Bei verminderter Intensität geht jede Farbenempfindung in Schwarz über. Also Thatsache ist, dass bei der Änderung der Intensität die Qualitätsempfindung sich verändert, indem sie sich mit Weiss mischt, wenn die Intensität steigt. Es muss, da jede Farbenempfindung aus Schwarz durch Intensitätszunahme zu Stande kommt, in jeder der Einfluss derselben auf die Qualitätsempfindung vorhanden sein, und bei der Steigerung der Intensität die Empfindung jenes Einflusses wachsen. Die Empfindung des Minimum jenes Einflusses der Intensität auf die Qualität ist die Sättigungsempfindung. Dieselbe nimmt zu, wenn das Weissliche einer sehr weisslichen Farbe abnimmt. Man kann also die Beeinflussung der Qualitätsempfindung durch die zunehmende Intensität als ein Weisslichwerden bezeichnen. Die Annäherung einer noch so dunkeln Farbe an Weiss wird durch Zunahme der Intensität bewirkt und gibt diese eigenthümliche Empfindung, die verschieden ist von dem additiven Zusammenempfinden der Intensität und Qualität, indem die Beurtheilung der Helligkeit, der Qualität und der Sättigung einer Farbe dreierlei verschiedene Acte sind und das blosse Entstehen einer Farbenempfindung, d. h. Addition der Intensität und Qualität, durchaus nicht über das Entstehen der Sättigungsempfindung Aufschluss gibt.

Im Tongebiet wird zwar eine der Sättigung entsprechende Empfindung gewöhnlich nicht besonders unterschieden; sie existirt

1) Handbuch der physiologischen Optik. Leipzig 1867. S. 234. 281 u. 319.

2) Dr. A. Chodin hat diese Versuche in meinem Laboratorium wesentlich erweitert und die von Helmholtz bestätigt (Chodin: Über den Einfluss der Lichtstärke auf die Farbenempfindungen. Jena 1877, der Sammlung physiologischer Abhandlungen 7. Heft).

aber in jeder Tonempfindung, nur wird sie nicht leicht unter gewöhnlichen Umständen isolirt ein Gegenstand der Aufmerksamkeit. Diese Empfindung ist die Tonglätte. In zweifacher Weise kann man sich davon überzeugen, dass sie sowohl von der Intensitätsempfindung, wie von der Qualitätsempfindung abhängt. Erstens braucht man nur eine einfache reine Tonempfindung von der geringsten Intensität an immer stärker werden zu lassen, so verliert sie zugleich an Glätte. Je lauter ein Schall, um so mehr tritt die Qualitätsempfindung gegen die Intensitätsempfindung zurück. Es wird also hier die Qualität durch die Intensitätszunahme beeinflusst und zwar benachtheiligt. Zweitens: Wenn man die ganze Reihe der in der Musik gebräuchlichen Töne in nicht zu kleinen Intervallen (von etwa 16 Doppelschwingungen in der Secunde) aufwärts durchschreitet, so findet, auch im Falle die Intensität constant gedacht wird, eine mit der Tonhöhe zunehmende Empfindung der Glätte statt. Die tiefsten Töne sind die rauhsten; ihre Rauhigkeit nimmt sehr merklich ab bis gegen die Mitte der eingestrichenen Octave; von da an werden die Töne glatt, mit zunehmender Höhe immer glatter, und die grosse Sicherheit, mit welcher ein beliebiger Ton für sich allein sofort für hoch oder tief (wie eine Temperatur für hoch oder niedrig) erklärt wird, beruht eben darauf, dass die tiefen Töne rauh, die hohen (jenseit $e^1$) glatt sind. Man kann sagen, dass mit abnehmender Qualität der Einfluss der Intensität zunimmt, bei wachsender Qualität die Intensität die Glätte weniger stört. Hierdurch wird der soeben ausgesprochene Satz ergänzt, dass mit zunehmender Intensität ein Ton an Glätte abnimmt, also mit abnehmender Stärke an Glätte gewinnt. Die letztere hängt von der Vereinigung der Qualität mit der Intensität ab; denn keine Tonhöhenempfindung für sich — ohne Stärke gedacht — hat etwas Rauhes oder Glattes an sich. Wie aber jede Farbe einen Sättigungsgrad an sich hat (man kann sagen etwas Weissliches oder Graues an sich hat) so hat auch jeder Ton irgendwelchen Grad der Glätte an sich. Und diese Empfindung als wesentlich verschieden von der blossen additiven Zusammenempfindung der Stärke neben der Höhe muss auf einer anderen thetischen Verknüpfung der Intensität mit der Qualität, als der additiven beruhen, denn in dieser bleibt die Qualität, wenn die Intensität zunimmt, unverändert, bei der reinen Empfindung nicht.

§ 28. Durch diese Exposition wird das Folgende verständlich. Lässt man die Intensität einer gegebenen Farbenempfindung

zunehmen, so dass also aus der Empfindung $\alpha + s_1$ die stärkere Empfindung $\alpha + s_1 + s_2$ wird, so würde der letztere Ausdruck genügen, wenn ausser der Zunahme der Intensitätsempfindung nichts Neues aufträte, wenn also die Qualitätsempfindung nach wie vor dieselbe bliebe. Aber letzteres ist bekanntlich nicht der Fall, sondern $\alpha$ wird weisslich empfunden, was durch das $+$ nicht angezeigt wird. Da aber das Weisslichwerden der Farbe einen thetischen Process involvirt — denn die Intensität wächst und die Qualität wird nicht vertieft — so muss die zur additiven Verknüpfung nächst höhere Verknüpfung geprüft werden, ob sie anwendbar sei. Diese ist die Multiplication. Soll nun eine multiplicative Verknüpfung der Intensität mit der Qualität die Anäherung an die Empfindung Weiss bezeichnen, so muss ausser der obigen Formel, welche nur die Summenempfindung gibt, auch eine Formel $\alpha . s_1 + \alpha . s_2 = \alpha . (s_1 + s_2)$ gelten, welche die Productempfindung gibt, indem sie anzeigt, dass das Weiss $\alpha . s_1$ in der gegebenen Farbe mit dem durch die hinzugekommene Intensitätsstrecke $s_2$ erzeugten Weiss $\alpha . s_2$ zusammen gleich ist dem durch die gesammte Intensitätsstrecke $(s_1 + s_2)$ erzeugten Weiss in der resultirenden Empfindung. Dieses bedarf aber nur des Beweises, dass man eine Weisslichkeitsempfindung beliebigen Grades also auch die durch $\alpha . (s_1 + s_2)$ entstandene herbeiführen kann durch Summirung einer gewissen Weisslichkeit mit einer durch Zunahme der Intensität herbeigeführten Weisslichkeitszunahme. Dieser Beweis wird durch den Appell an die eigene Empfindung und den (wie oben für Intensitäten) leicht zu gebenden Beweis geliefert, dass die thetische Verknüpfung der Weisslichkeitsempfindungszunahmen additiv ist. Also:

> Die Empfindung des Weisslichwerdens einer Farbe, welche durch Intensitätszunahme zunimmt, lässt sich durch eine Multiplication der Qualität in die Intensität entstanden denken.

Auf diese Weise wird dem Afficirtwerden der Qualität der Farbenempfindung durch die Intensitätszunahme Rechnung getragen; und es wird nun verständlich, dass durch fortgesetzte Steigerung der Intensität einer Farbenempfindung immer mehr Weiss erhalten wird, indem die Summe vieler Producte

$$\alpha . s_1 + \alpha . s_2 + \alpha . s_3 \ldots + \alpha . sn = \alpha . (s_1 + s_2 + s_3 \ldots + sn)$$

d. h. wenn schon durch ein einmaliges Multipliciren der Qualität in die Intensität, dieselbe weisslich wird, so wird durch Summirung des Resultates der wiederholten Multiplication in weitere

(gleichgrosse) Intensitätzunahmen, nothwendig immer mehr Weiss erhalten bis schliesslich soviel Weiss da ist, dass die ursprüngliche Qualität aus der es stammt, nicht mehr deutlich mitempfunden wird, indem da

$$(a + s_1) + s_2 + s_3 \ldots + sn = a + (s_1 + s_2 + s_3 \ldots + sn)$$

schliesslich $a$ gegen $s$ verschwindet.

Eben diese Betrachtung lässt sich auf Töne anwenden:

Die Empfindung des Rauhwerdens eines Tones, welche durch Intensitätszunahme zunimmt, lässt sich durch multiplicative Processe entstanden denken.

§ 29. Die Lysis der multiplicativen Thesis ist die Division, deren formale Beziehung zur Addition und Subtraction [1]) ich aber, um nicht zu weitläufig zu werden, hier ebenso unterlasse, wie die Ableitung der dritten thetischen Verknüpfung, des Potenzirens, und der lytischen Operationen des Radicirens und Logarithmirens. Die Potenzirung findet auf dem Gebiete der reinen Empfindungslehre, soviel ich sehe, keine unmittelbare Anwendung. Dass sie aber darum überhaupt auf Empfindungsgebilde nicht anwendbar sei, ist damit durchaus nicht gesagt.

§ 30. Wenn, wie in den vorigen Paragraphen dargethan, beziehlich angedeutet wurde, die Empfindung der Hebung durch intensiven oder durch qualitativen Contrast und die der Sättigung auf multiplicativen Processen beruhen können, so ist es nothwendig, dass das Rückgängigwerden jener Steigerungen durch Divisionsvorgänge zu Stande kommen könne, d. h.: Wenn die Hebungen durch Contrast und das Weisslichwerden der Farbe auf der (thetischen) Empfindung von Producten beruhen, so müssen die gegentheiligen (lytischen) Empfindungen auf der Empfindung der entsprechenden Intensitäts- und Qualitäts-Quotienten beruhen, also die Abnahme der Weisslichkeits-Empfindung auf der Empfindung des Verhältnisses der Qualität zur Intensität. Dieses spricht sich beim intensiven Farbencontrast darin aus, dass z. B., wenn Weiss und Schwarz contrastiren, nicht allein ersteres gehoben wird, was thetisch und zwar multiplicativ ist, sondern letzteres vertieft wird, was lytisch und divisiv ist, da mit der Zunahme der Tiefe des Schwarz die Helligkeits-Empfindung desselben sinkt; im intensiven Toncontrast darin, dass ein lauter Ton, neben dem-

1) H. Grassmann 1844 S. 11. Vortrefflich und ganz elementar entwickelt J. G. Grassmann (Programm des Stettiner Gymnasiums 1827, S. 14) diese Beziehung.

selben leise angegebenen Ton, lauter, und zugleich letzterer leiser, erscheint; im Druckcontrast darin, dass ein grosses Gewicht im Vergleich zu einem kleinen gleich warmen schwerer, und zugleich letzteres leichter, erscheint. Beim qualitativen Contrast ebenso: Grün wird durch Roth gehoben und zugleich das Roth durch das Grün vertieft. Ein hoher Ton wird durch einen tiefen gehoben, und dabei letzterer zugleich entschiedener als tief empfunden, wie man leicht bei Verwendung gleichstarker Töne bemerkt. Kälte erscheint neben gelinder Wärme noch kälter und umgekehrt. Bei dem Rückgängigwerden des Weisslichen in der Farbe tritt eine Annäherung derselben an Schwarz ein, welches im Augenschwarz maximal ist, bei der Abnahme der Lautheit eines Tones eine Annäherung desselben an die Glätte oder Milde, welche in der Stille ihr Maximum erreicht. So kann man, ohne den geringsten Zwang, geradezu die Empfindung der Sättigung als eine besondere Art von Contrastempfindung auffassen, indem der Gegensatz der Intensität und Qualität in der e. r. Empfindung wie eine Contrastempfindung in das Urtheil tritt. Ist die Intensität sehr gross im Vergleich zur Qualität, so wird diese benachtheiligt, jene gehoben. Ist die Qualität sehr gross, die Intensität im Vergleiche zu ihr klein, so tritt die erstere noch mehr hervor, die letztere zurück. In der Empfindung vollkommener Sättigung halten sich beide das Gleichgewicht.

Diese jetzt vielleicht noch etwas willkürlich erscheinenden Auffassungen von der Bedeutung der Division als eines Empfindungsactes erhalten durch die geometrische Versinnlichung erst ihre Begründung.

§ 31. Der Grund, weshalb in diesem Abschnitte die Ausführung des Inhalts der letzten Paragraphen (§ 25 und 28 bis 30) unterbleibt, liegt darin, dass hier nur die thatsächliche Anwendbarkeit der allgemeinsten rein formalen Verknüpfungsgesetze auf die einfachen Empfindungsgebilde darzulegen war. So muss noch besonders hervorgehoben werden, dass der hier entwickelte Multiplicationsbegriff der allgemeinste ist, den es überhaupt gibt. In ihm ist nichts enthalten von Associativität und Commutativität, wie in der gewöhnlichen arithmetischen Multiplication, wo $ab = ba$ und $a(bc) = (ab)c$; vielmehr bleibt die Frage offen, ob im Empfindungsgebiete etwa eine incommutative Multiplication verwirklicht sei. (Die Multiplication im § 28 wird sich als incommutativ herausstellen, da $\alpha . s$ nicht gleich $s . \alpha$, sondern $= -s . \alpha$ ist). Die arithmetische Multiplication sowohl wie alle anderen Multiplicationen

fallen aber als Specialfälle unter den von Grassmann abgeleiteten allgemeinsten Multiplicationsbegriff, wie er hier (im § 24 und 26) dargelegt und angewendet wurde, indem sie aus dem Hinzukommen näherer Bestimmungen zu ihm resultiren. Der allgemeinste Multiplicationsbegriff selbst wurde durch seine distributive Eigenschaft, die aus seiner Beziehung zur Addition sich ergibt (§ 26) charakterisirt. Wo diese zutrifft, ist die thetische Verknüpfung multiplicativ, die zugehörige lytische divisiv, wo sie nicht realisirt ist, liegt auch keine Multiplication vor. Es ist dabei wesentlich festzuhalten, dass auch da, wo nur die incommutative Multiplication sich verwirklicht, alle anderen vorstehend entwickelten Verknüpfungsregeln ihre volle Anwendung behalten.

Im Übrigen schliesse ich diesen Abschnitt mit dem Bemerken, dass die Realität der Addition und Subtraction als Empfindungsvorgänge in strenger Form rein formal dargethan werden sollte, ohne nähere Bestimmungen, in welcher Art diese Addition und Subtraction im Empfinden etwa zu veranschaulichen sein möchten. Die Veranschaulichung wird in den nun folgenden Paragraphen gegeben oder wenigstens versucht.

## VIERTER ABSCHNITT.

# Die geometrische Addition und Subtraction der Intensität und Qualität.

§ 32. In jeder vollständigen e. r. Empfindung unterscheidet das Urtheil Intensität und Qualität. Also sind beide in jeder Empfindung enthalten. Man muss sich vorstellen, dass beim Entstehen einer Empfindung, z. B. im Augenblick des Erwachens eines Sinnesgebietes, das an und für sich indifferente Empfindungselement sich zugleich nach zwei grundverschiedenen Richtungen ändert und die Resultirende eine aus beiden zusammengesetzte Empfindungsänderung, und damit die Empfindung, gibt. Es wird also jede Empfindungsänderung in zwei Änderungen, eine intensive und qualitative, zu zerlegen sein, welche voneinander unabhängig sind. Denkt man sich nun die e. r. Empfindung dadurch entstanden, dass das Element die beiden verschiedenartigen Grundänderungen erfährt, beide nach der positiven und negativen Seite, soweit es geschehen kann, durch Fortsetzung der stetigen Änderungsweise, so entstehen aus dem ursprünglichen Elemente neue Elemente, und deren Gesammtheit bildet ein Empfindungssystem zweiter Stufe. Die erhaltenen Elemente sind alle voneinander verschieden, wie die Puncte einer Ebene. Hat sich nun das ursprüngliche Element um eine Intensitätsstrecke $s$ und um eine Qualitätsstrecke $\alpha$ geändert, so ist das Gesammtresultat beider Änderungen zugleich das Ergebniss einer Änderung, welche die Vereinigung jener beiden ersten ist. Es ist dabei gleichgültig, ob zuerst die qualitative oder zuerst die intensive Änderung genommen wird und gleichgültig, ob das $s$ in seinem Gange unterbrochen wird, den es dann wieder fortsetzt, oder ob dasselbe mit dem $\alpha$ geschieht, d. h. es ist $s \frown \alpha = \alpha \frown s$ und $(s_1 \frown s_2) \frown \alpha = s_1 \frown (s_2 \frown \alpha)$, also die Vereinigung commutativ und associativ. Wenn ferner die $s$- oder die $\alpha$-Änderung zu- oder abnimmt, so ändert sich auch die resultirende Empfindungsänderung, somit ist (nach § 17) die Vereinigung der intensiven und qualitativen Änderung des ursprünglichen

Elements zur Empfindungsänderung eine Addition (vergl. § 21 u. 23). Hierbei ist festzuhalten, dass die beiden vereinigten Änderungsweisen, welche völlig unabhängig voneinander sind, nur dann gleiche neue Elemente erzeugen können, wenn das $s$ des einen gleich dem $s$ des anderen und das $\alpha$ des einen gleich dem $\alpha$ des anderen Elementes ist (§ 8), und dass die neu erzeugten Elemente ausnahmslos auf dem beschriebenen Wege entstanden zu denken sind. In dem System zweiter Stufe, welches sie bilden, kann jede Strecke, nämlich jede Empfindungsstrecke, als Summe der 2 unabhängigen Änderungsweisen dargestellt werden (§ 38), aber jedesmal nur auf eine Art, und das ganze System kann erzeugt gedacht werden durch die zwei unabhängigen Änderungsweisen aus jedem beliebigen Element desselben, d. h. aus einem solchen Element können alle übrigen durch die intensive und qualitative Änderungsweise erzeugt werden [1]).

§ 33. Man kann sich nun die Gesammtheit aller Elemente der zwiefach ausgedehnten Mannigfaltigkeit der Empfindungen eines Sinnesgebiets als eine Ebene veranschaulichen, deren nach Intensität und Qualität bestimmte Puncte die einzelnen Empfindungsgrade und deren Strecken die Änderungen des Empfindungselements nach Grösse und Richtung repräsentiren. Die beiden unabhängigen Änderungsweisen des Empfindungselements sind durch die beiden Dimensionen der Ebene dargestellt. Man kann sich ferner vorstellen, dass die Aufmerksamkeit (als Aufmerkpunct) über die Ebene wandert, wie der Blickpunct über das Sehfeld, daher die Empfindungsebenen der drei obersten Sinnesgebiete Farbenfeld, Tonfeld, Tastfeld heissen können. Wenn aber die Aufmerksamkeit von einem Sinnesg ebietsich gänzlich abwendet, einem anderen zu, so ist ersteres Feld darum nicht etwa verschwunden, um ein anderes Mal wieder neu zu entstehen, sondern die Intensität wird nur negativ (§ 22), und steigt sofort wieder auf und über die Merkschwelle, wenn die Aufmerksamkeit sich jenem ersten Empfindungsfeld wieder zuwendet. Um nun die Beziehungen der einzelnen Puncte der Ebene zueinander, und namentlich die Beziehung der Intensität zur Qualität und umgekehrt, auf Grund der im vorigen Abschnitt gewonnenen Thatsachen bezüglich ihrer Verknüpfungen zu veranschaulichen, ist es nothwendig, sich

1) Der Beweis für ein System $n$-ter Stufe mit $n$ unabhängigen Änderungsweisen bei Grassmann (1844 § 20) vereinfacht sich für das Empfindungssystem mit seinen nur 2 unabhängigen Änderungsweisen.

klar zu machen, dass die geometrische Veranschaulichung eben nur eine Illustration ist und die eigenthümliche Selbständigkeit der Verknüpfungen im Empfindungsgebiete, selbst wenn die Übereinstimmung mit den Verknüpfungen geometrischer Gebilde noch so gross ist, als eine Realität *sui generis* nach wie vor bestehen bleibt. Am deutlichsten wird diese Eigenthümlichkeit durch Betrachtung des Begriffs der Empfindungsänderung, über welchen deshalb hier eine Bemerkung eingeschaltet wird.

§ 34. Alle bekannten Änderungen in der Erscheinungswelt beruhen auf Bewegung, setzen also die Zeit und den Raum voraus; und man nimmt deshalb mit Recht an, dass auch alle unbekannten Änderungen der Erscheinungswelt auf Bewegung beruhen, also gleichfalls Zeit und Raum voraussetzen. Nun ist aber die Empfindungsänderung kein Theil der Erscheinungswelt; sie erscheint nicht, sondern sie ist, und zwar ist sie raumlos und setzt die Zeit nicht voraus; sie kann also nicht auf einer Bewegung beruhen. Dass hierin nichts Widersprechendes liegt, zeigt die folgende Überlegung. Denkt man sich im absolut leeren Raum einen absolut unelastischen Stab, so wird, wenn das eine Ende A desselben gestossen wird, gleichzeitig mit dem A das andere Ende B seinen Ort verändern. Zwischen der Ortsänderung des A und der des B vergeht keine Zeit. Doch ist eine Beziehung zwischen A und B, sonst würde sich B nicht ändern können, wenn A sich ändert. Hier liegt also der Fall einer Änderung vor, durch Beeinflussung des B von Seiten des A, ohne dass Zeit für die Geltendmachung des Einflusses erforderlich ist. Geradeso die Empfindungsänderung, wenn man sich auch noch den Raum fortdenkt. Ist A der erste Empfindungszustand, so kann der zweite B herbeigeführt werden, ohne dass eine Zeit für die Beeinflussung des B durch A vergeht. Die Änderung der Empfindung, ihre Umwandlung von A in B ist zeitlos, wie die Fortpflanzung des Stosses im Stabe, falls derselbe absolut starr gedacht wird, was natürlich zu unmöglichen Consequenzen in der theoretischen Physik führt, da diese es nur mit Erscheinungen zu thun hat, an sich aber kein Ungedanke ist. Man kann sich vielmehr die zeit- und raumlose Empfindungsänderung völlig widerspruchsfrei denken, wenn die Empfindung das Ding an sich (§ 1) im Sinne Kant's ist, in welchem jeder Zustand A wie B weder zugleich noch nacheinander, weder nebeneinander, noch nicht nebeneinander, d. h. unzeitlich nnd unräumlich ist (wie z. B. der Begriff eines Begriffs gleichfalls unzeitlich und unräumlich ist). Und zwar denke ich mir, dass

einiges von den Dingen an sich, nämlich die menschlichen Empfindungen, mittelst der Zeit und des Raumes, die der Verstand dazuthut, in die Wahrnehmung gelangen. Das Entstehen einer Empfindung an sich aber verlangt ebensowenig Zeit, Raum, Bewegung wie das Verschwinden einer Empfindung. Dagegen ist Zeit und ist Raum unerlässlich, damit die Aufmerksamkeit oder das Bewusstsein oder die Psyche eine Empfindungsänderung merkt, was eben die Wahrnehmung ausmacht. Diese besteht darin, dass die e. r. Empfindung in die Zeit und in den Raum gebracht wird vom Verstande. Bliebe es nun bei dieser Temporisirung und Localisirung, so wäre zwischen subjectiven Wahrnehmungen und objectiven Erscheinungen kein Unterschied. Dieser wird erst dadurch gegeben, dass der Verstand die Empfindung ausserdem noch mit einer Ursache — dem Stoss — versieht. Hierdurch ist die subjective Wahrnehmung zur objectiven Wahrnehmung gemacht, und das ist es, was Erscheinung heisst und die sinnliche Wirklichkeit ausmacht. Darauf kommt es nun hier nicht an, sondern ich wünschte hier nur zu zeigen, dass die Empfindungsänderung ein Abstractum darstellt, in welchem von Raum und Zeit schlechterdings nichts enthalten ist. Das Wort bezeichnet „das Empfinden". Dieses bildet das Fundament aller Vorgänge der Welt, nicht das Denken, denn man kann empfinden, ohne zu denken, nicht aber denken, ohne zu empfinden.

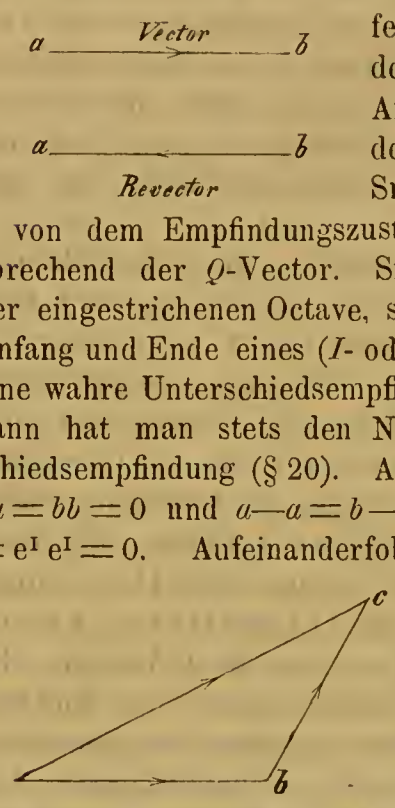
In dieser Darlegung liegt nicht der geringste Widerspruch mit der Annahme (§ 5), dass die Empfindungen durch stetige Änderung des Elements zu Stande kommen. Denn in Betreff der Entstehung einer Empfindung aus einer anderen ist nichts bekannt, als dass sie durch eine Änderung im gewöhnlichen Sinne nicht zu Stande kommt, also auch nicht durch eine stetige Änderung im gewöhnlichen Sinne. Jene Annahme galt und gilt aber für die Wahrnehmung. Und da ist sie allerdings nothwendig, weil man thatsächlich von irgend einem Grade irgend eines Empfindungsgebildes stetig zu anderen Graden auf demselben Sinnesgebiete gelangen kann. Da aber niemals die stetige Änderung selbst wahrgenommen wird, sondern nur das Gewordene, welches der Verstand erst zu einem Stetigen verbindet, so ist auch selbst für die Wahrnehmung der strenge Beweis für die reale Existenz jener stetigen Änderung nicht zu erbringen. Die Annahme ist nur ein Mittel zur Verständigung und es muss — wenn man ganz streng verfahren will — die Frage offen bleiben, ob das Gebiet der e. r. Empfindungen in Wahrheit eine stetige (zweifach ausge-

dehnte) Mannigfaltigkeit bildet, oder eine discrete. Der erstere Fall — die einzige Hypothese, ausser der Permanenz der allgemeinen formalen Verknüpfungsgesetze, welche ich der reinen Empfindungslehre principiell zu Grunde lege — ist nur darum, soviel ich sehe, der Wahrscheinlichere, weil es völlig unbegreiflich wäre, wie der Verstand überhaupt zu dem Begriffe des stetig Veränderlichen käme (den er in der Erfahrung in der Natur nirgends vorfindet, sondern in sie verlegt), wenn er ihn nicht gleichsam als Decernent beim Eindringen der Empfindungen in seine Zeit und in seinen Raum bei seiner Urtheilsthätigkeit vorfände. Er wird uns von der Empfindung octroyirt.

§ 35. Nachdem im vorigen Paragraphen die Eigenthümlichkeit der Empfindungsänderung festgesetzt worden ist, wird nunmehr ihre Darstellung durch gerade Linien von bestimmter Richtung in einer Ebene unbedenklich erscheinen. Jedoch werde ich theils nur der Kürze wegen, theils um die Besonderheit nicht durch einen vieldeutigen Ausdruck zu verdecken, theils endlich um gewisse merkwürdige Übereinstimmungen der Empfindungslehre und Ausdehnungslehre besser hervortreten zu lassen, die linear gedachte Empfindungsänderung Empfindungs-Vection, kürzer *E*-Vection nennen, und unterscheide die Intensitäts-Vection als *I*-Vection von der Qualitäts-Vection als *Q*-Vection. Ich werde ferner eine Vection von bestimmter Grösse und Richtung in dem Empfindungsfelde einen Vector nennen und demgemäss *E*-Vectoren, *I*-Vectoren, *Q*-Vectoren unterscheiden. Das Wort Vector, welches Sir W. R. Hamilton einführte, bezeichnet genau dasselbe, was Grassmann „Strecke“ genannt hat (1844, § 14). Da aber dem letzteren Ausdruck das Räumliche und Ausgedehnte stark anhaftet (wie dem Ausdrucke „Änderung“ das Zeitliche) und eine dem Worte „Vection“ entsprechende Bezeichnung fehlt, indem „Streckung“ nicht anwendbar erscheint, so will ich überall, wo es auf geometrische Repräsentation der Empfindungsgebilde und ihre Verknüpfungen ankommt, die Ausdrücke „Vectoren“ und „Vectionen“ verwenden. Um diese Verwendung möglichst anschaulich zu machen, benutze ich Hamilton's Quaternionenlehre[1]) soweit es sich um rein mathematische Begriffe handelt.

1) *Elements of Quaternions by Sir William Rowan Hamilton.* London 1866. Obwohl dieses dickleibige Werk von 762 Seiten (wozu noch eine Inhaltsanzeige von 69 Seiten Umfang kommt) meist sehr schwerfällig und wenig übersichtlich geschrieben ist, findet man doch das die Entwicklung des Vectorbegriffs Betreffende klar und vollständig darin auseinandergesetzt. Mit der

§ 36. Ist nun ein *I*- oder ein *Q*-Vector gegeben, so sollen von hier an die kleinen Lateinischen Buchstaben *a* und *b* seinen Anfangspunct und Endpunct, also die entsprechenden *I*- und *Q*-Grade bezeichnen, zwischen denen die Vection in der Empfindung stattfindet. Dann ist *ab* ein *I*-Vector, welcher gleich ist der Differenz seines Endpunctes, des Grades der Empfindungsstärke *b*, minus seinem Anfangspuncte, des Grades *a*, näher: der *I*-Vector *ab* ist das Ergebniss der Subtraction des Empfindungszustandes *a* von dem Empfindungszustande *b*. Er ist also $= b - a$. Entsprechend der *Q*-Vector. Sind zum Beispiel $c^I$ und $e^I$ Tonhöhen der eingestrichenen Octave, so ist der *Q*-Vector $c^I e^I = c^I - c^I$. Sind Anfang und Ende eines (*I*- oder *Q*-)Vectors verschieden, so ist stets eine wahre Unterschiedsempfindung vorhanden, fallen sie zusammen, dann hat man stets den Nullvector und niemals eine Unterschiedsempfindung (§ 20). Alle Nullvectoren sind einander gleich: $aa = bb = 0$ und $a - a = b - b = 0$. Oder $c^I c^I = c^I - c^I = e^I - e^I = e^I e^I = 0$. Aufeinanderfolgende (*I*- oder *Q*-)Vectoren heissen Vector und Provector. Der Vector vom Anfangs-Punct *a* eines Vectors zum Endpunct *c* seines Provectors heisst Transvector, also ist *ab* ein Vector, *bc* sein Provector, *ac* der Transvector. Die Vectoren *a*—*b* und *b*—*a*, von denen also der eine eine Zu-, der andere eine gleich grosse Abnahme in der (*Q*- oder *I*-)Empfindung bezeichnet, heissen Vector und Revector. So ist z. B. der *I*-Vector der 2 Druckempfindungsgrade von 4 zu 5 Kilo entgegengesetzt gleich gross dem *I*-Revector der 2 Grade von 5 zu 4 Kilo, die Tonhöhendifferenzempfindung, d. h. die Intervallempfindung oder der *Q*-Vector, $c^I c^I$ entgegengesetzt gleich gross dem *Q*-Revector $e^I c^I$. Sind demnach 2 *I*- oder *Q*-Vectoren gleichgross, so können sie gleichsinnig oder ungleichsinnig gleich gross sein. Sind sie aber gleich, so sind sie gleichgross (gleichlang) und gleichsinnig (gleichgerichtet). Gleich sind jedoch in der Empfindung irgend 2 Vectoren nur dann, wenn sie dieselbe Lage




reinen Empfindungslehre, die über 2 Dimensionen nicht hinausgeht, hat die Quaternionenlehre im Übrigen nichts zu thun. Für eine Wahrnehmungswissenschaft aber wird sie unentbehrlich, da diese mit Streckengebieten $(2 + n)$ ter, und Punctgebieten $(3 + n)$ ter Stufe operiren muss.

haben. Ferner sind auch im Empfindungsgebiete Vectoren einander parallel, u. z. gleichläufig oder gegenläufig[1]) parallel. So sind die *Q*-Vectoren $c^{I}\,c^{II}$ und $c^{II}\,c^{III}$ gleichläufig parallele Intervall-Empfindungen, $c^{III}\,c^{II}$ und $c^{I}\,c^{II}$ gegenläufig parallele. Also alle Octaven sind parallele *Q*-Empfindungen, alle Quinten einander parallele *Q*-Empfindungen u. s. f. für alle musikalischen Intervalle: Gleich sind aber nur zwei Differenzempfindungen, von denen die eine *ceteris paribus* die Wiederholung der anderen ist, wie $c^{I}\,c^{II} = c^{I}\,c^{II}$. Die parallelen *I*-Vectoren markiren sich, ohne besonders darauf gerichtete Übung, nicht scharf in der Empfindung, und werden gewöhnlich nicht so genau wie die Tonhöhen-Vectionen (durch Noten) bezeichnet. Aus diesem Grunde nehme ich die Beispiele vorzugsweise aus dem Tongebiet, bemerke jedoch, dass zunächst die Tonstärke *I* überall constant zu denken ist. Nur in diesem Falle sind überhaupt alle Tonintervallempfindungen einander parallel, nämlich gegenläufig oder gleichläufig, gleich gross oder ungleich gross.

Es folgt, dass alle Octaven-Vectoren in der Empfindung gleich gross sind. Hat man daher in der alle Tonhöhen umspannenden Geraden 2 verschiedene gleichgrosse gleichläufige Vectoren, z. B. $c^{I}\,c^{II}$ und $e^{I}\,e^{II}$, so sind diese einander in der Empfindung parallel und gleichgross, aber nur geometrisch gleich, denn die Empfindung der Octave $c^{I}\,c^{II}$ ist verschieden von der der Octave $e^{I}\,e^{II}$. Aber die Grösse der Vectionen $c^{I}\,c^{II} = e^{I}\,e^{II}$ und $c^{I}\,e^{I} = c^{II}\,e^{II}$ ist auch in der Empfindung gleich,
wie im geometrischen Sinne,

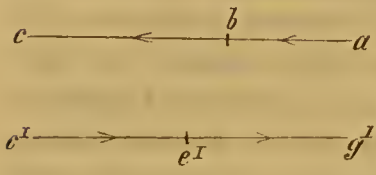
daher die Ähnlichkeit aller Octavenempfindungen miteinander. Dies überträgt sich auf alle Intervalle, und auch auf alle anderen *Q*- und *I*-Vectoren. Man hat für parallele *Q*- oder *I*-Differenz-Empfindungen allgemein:

| Grösse | Richtung | Höhe | Empfindung | Beispiel |
|---|---|---|---|---|
| gleich | gleichläufig | gleich | gleich | $c^{I}\,c^{II}$ & $c^{I}\,c^{II}$ |
| gleich | gleichläufig | ungleich | ähnlich | $c^{I}\,c^{II}$ & $c^{I}\,c^{II}$ |
| gleich | gegenläufig | gleich | entgegengesetzt gleich | $c^{I}\,c^{II}$ & $c^{II}\,c^{I}$ |
| gleich | gegenläufig | ungleich | entgegengesetzt ähnlich | $c^{I}\,c^{II}$ & $c^{II}\,c^{I}$ |
| ungleich | gleichläufig | ungleich | ungleich | $c^{I}\,g^{I}$ & $c^{I}\,c^{I}$ |
| ungleich | gegenläufig | ungleich | ungleich | $c^{I}\,g^{I}$ & $c^{I}\,c^{I}$ |

1) Diese Bezeichnungen hat Grassmann (1844 S. 19) vorgeschlagen für den Parallelismus in der Geometrie.

Hierbei ist alles ausser der Grösse, Richtung und Lage in der Ebene (d. h. Höhe, bez. für *I*-Vectoren: Stärke) constant gedacht.

§ 37. Wenn ein *I*-Vector von einem zweiten *I*-Vector subtrahirt wird, der mit ihm denselben anfänglichen Intensitätsgrad hat, also coinitial ist, $ac—ab$, so ist der Rest der dritte *I*-Vector von $b$ nach $c$, also $c-b=bc$. Dasselbe gilt für *Q*-Vectoren.




So ist z. B. für Tonhöhendifferenzen in der Empfindung $c^I g^I - c^I e^I = e^I g^I$. Für alle coinitialen Vectoren, auch wenn sie verschiedene Richtungen haben, gilt allgemein diese Bestimmung $ac-ab=bc$. Bei einer reinen *I*- oder reinen *Q*-Vection bleibt diese Gleichung aber in der geraden Linie. Wenn demnach eine Unterschiedsempfindung ihre Richtung umkehrt, so wird dieses in zweifacher Weise ausgedrückt, da

$-c^I e^I = e^I c^I$ und $= -(e^I - c^I)$;

ein Minusstrich vor einem *I*- oder *Q*-Vector kehrt dessen Richtung um, verwandelt also eine Empfindungs-Zunahme oder -Erhöhung in eine Abnahme oder Vertiefung, d. h. eine positive *I*- oder *Q*-Vection in eine negative (§ 20).

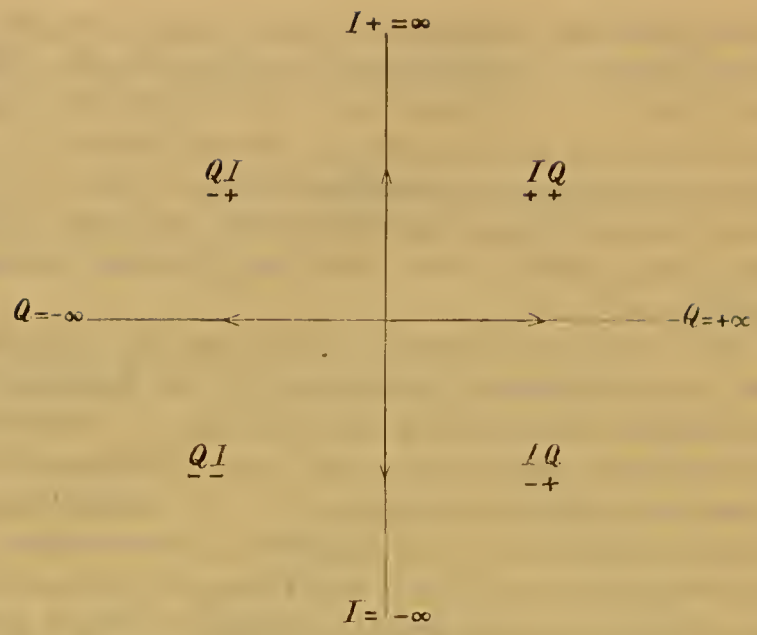
Ferner werden *I*-Vectoren unter sich und *Q*-Vectoren unter sich addirt. Es ist $ab+bc=ac$, indem 2 successive *I*-Vectoren zusammenempfunden gleich sind dem Unterschiede des Endgrades des zweiten *I*-Vectors minus dem Anfangsgrade des ersten. Auch ist $ab+a=b$, indem, wenn ein *I*-Vector zu seinem Anfangsgrade addirt wird, sein Endgrad resultirt. Oder, die beiden letzten Gleichungen in Punctgleichungen, d. h. in Gleichungen zwischen *I*-Graden übersetzt: $(b-a)+(c-b)=c-a$, und $(b-a)+a=b$. Für *Q*-Vectoren wird dieselbe Beziehung bei Tonhöhen besonders deutlich. Es ist z. B. $(g^I—e^I)+(e^I—c^I)=g^I—c^I$ und $(e^I—c^I)+c^I=e^I$, das heisst $c^I g^I + c^I e^I = c^I g^I$ und $c^I e^I + c^I = e^I$. In der That, wenn man die Differenz $g^I—e^I = e^I g^I$ als Vector an die Differenz $e^I—c^I = c^I e^I$ als Vector anschliesst, so ist das Resultat die Unterschiedsempfindung $g^I—c^I = c^I g^I$ als empfundener Gesammtvector; und wenn man an die Tonhöhe $c^I$ die Differenzempfindung $e^I—c^I = c^I e^I$ als Vector anschliesst, so erhält man als Resultat die Tonhöhe $e^I$. Wird also ein Vector und ein Vector addirt, so resultirt immer wieder ein Vector, und wird ein Vector zu seinem Anfangspunct addirt, so erhält man als Resultat der Operation seinen Endpunct.

So hat man auch für 3 *I*-Grade $(c—a)—(b—a)=(c—b)$. Dasselbe bei *Q*-Graden, z. B. Tonhöhen: $(g^I—c^I)—(e^I—c^I)=(g^I—e^I)$, indem $c^Ig^I—c^Ie^I=e^Ig^I$. Ferner ist in der Empfindung allgemein $ba+ab=0$ oder $(a—b)+(b—a)=0$, etwa $e^Ic^I+c^Ie^I=0$, d. h. die Summe gleichgrosser gegenläufig paralleler (*I*- oder *Q*-)Vectoren gleicher Lage ist stets ein Nullvector, da keine Differenzempfindung übrig bleibt, wenn man eine Zunahme rückgängig macht (§ 20).

Bei der Vereinigung successiver Vectoren ist deren Reihenfolge und Zusammenfassung gleichgiltig für die Gesammtvection und den Endgrad. Auch gibt die Subtraction der Vectoren voneinander immer nur einen Grad, nur einen bestimmten Vector. Also stimmt die Addition und Subtraction der Empfindungsintensitäten untereinander und der Qualitäten untereinander völlig überein mit der geometrischen Addition und Subtraction von Strecken. Hierdurch erhält also das bezügliche Resultat des vorigen Abschnitts (§ 18) seine letzte zu seiner vollkommenen Präcisirung nothwendige Bestimmung, dass nämlich die Addition und Subtraction der Empfindungsgebilde erster Stufe untereinander genau so vor sich geht, wie die der Strecken oder Vectoren in der Ausdehnungslehre vorgenommen wird [1]).

§ 38. Sollen *Q*-Vectoren zu *I*-Vectoren addirt und die daraus entspringenden Empfindungen geometrisch dargestellt werden, so müssen die Linien eine bestimmte Lage zueinander haben. Alle *Q*-Grade liegen auf einer geraden Linie, und alle *I*-Grade liegen auf einer geraden Linie. Da nun die Intensität die eine, die Qualität die andere Dimension der e. r. Empfindung bilden, so muss, wenn man sie geometrisch miteinander in Beziehung setzen will, die *Q*-Linie perpendiculär zur *I*-Linie stehen. Die Ebene, in der beide liegen, ist dann die Ebene der e. r. Empfindungen:

1) Möbius: Über die Zusammensetzung gerader Linien und eine daraus entspringende neue Begründungsweise des barycentrischen Calculs in Crelles Journal für Mathematik. 28. Bd. Heft 1, S. 1—9. 1844. Grassmann, Ausdehnungslehre 1844.




Jeder Punct dieser Ebene ist eine e. r. Empfindung nach Intensität und Qualität bestimmt. Man sieht leicht, dass das Element nach 4 Richtungen fortschreiten (sich stetig ändern) kann. Nimmt man z. B. einen Ton *a* mässiger Stärke und Höhe als Durchschneidungspunct der beiden Axen, so kann eintreten: Zunahme der Höhe (nach rechts), Abnahme der Höhe (nach links), Zunahme der Stärke (nach oben), Abnahme der Stärke (nach unten). Der erste Fall wird dargestellt durch Addition eines + *Q*-Vectors zu *a*, der zweite durch Addition eines — *Q*-Vectors zu *a*, der dritte durch Addition eines + *I*-Vectors zu *a* und der vierte durch Addition eines — *I*-Vectors zu *a*. Dasselbe gilt für Farben- und Temperatur-Druckempfindungen. Um aber einen festen Punct in der Ebene zu haben soll der Durchschneidungspunct mit dem mit der Intensität Null (§ 22) behafteten Empfindungszustand der Merkschwelle identificirt werden, wie denn in der That sämmtliche Empfindungen, die man im urtheilenden Zustande hat, Endpuncte von positiven Vectoren sind, deren anderer Endpunct, d. h. Anfangspunct, der *I*-Nullpunct im Augenblick des Erwachens ist, d. h. in dem Augenblick, in welchem die Aufmerksamkeit über die Schwelle tritt. Dagegen können alle Empfindungen, deren Beurtheilung, sei es hinsichts der Intensität, sei es hinsichts der Qualität, sei es hinsichts beider, fehlt, durch negative Vectoren bezeichnet werden, die mit jenen ersten coinitial sind. Also stellt die Empfindungstafel eines Sinnesgebietes oben alle e. r. Empfindungen dar, deren Intensität im Urtheil ist, unten alle diejenigen,

deren Intensität nicht beurtheilt wird, rechts alle diejenigen, deren Qualität im Urtheil ist, links endlich alle diejenigen e. r. Empfindungen, deren Qualität nicht beurtheilt wird. Die vier Quadranten enthalten also, wenn der Nullpunct, d. h. Schwellenpunct der Intensitätsbeurtheilung in den der Qualitätsbeurtheilung gelegt wird, je nach dem gewählten Sinnesgebiet Folgendes:

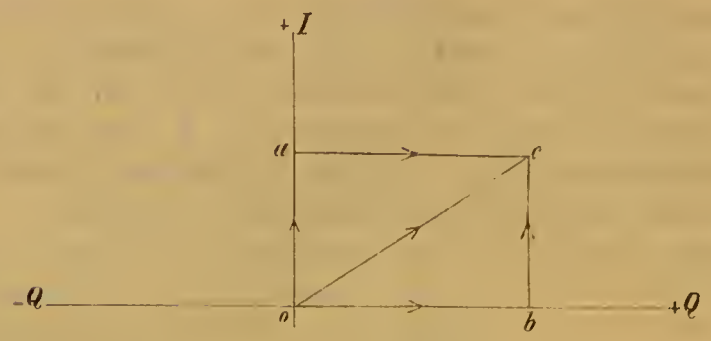
I. der erste $+I+Q$: 1) alle Farbenstufen in jeder Helligkeit; 2) alle Tonhöhen in jeder Stärke; 3) alle Temperaturen mit jedem Druckgrade verbunden.

II. der zweite $+I-Q$: 1) alle Helligkeitsempfindungen, deren Farbenqualität nicht beurtheilt ist; 2) alle Tonstärke-Empfindungen, deren Höhe nicht beurtheilt ist; 3) alle Berührungsempfindungen, deren Druckgrade ohne Rücksichtnahme auf die Temperaturen beurtheilt sind.

III. der dritte $-I-Q$: Unbewusste Empfindungen, d. h. solche, deren Intensität und Qualität nicht in das Urtheil treten, indem sie noch nicht oder nicht mehr Gegenstand der Aufmerksamkeit sind.

IV. der vierte $-I+Q$: 1) alle Farbenqualitätsempfindungen ohne Beurtheilung der Helligkeiten; 2) alle Tonhöhen ohne Beurtheilung der Tonstärken; 3) alle Temperaturempfindungen ohne Beurtheilung der damit verbundenen Druckgrade.

§ 39. Findet nun vom Nullpunct $o$ der Intensität aus eine $I$-Vection $oa = a-o$ statt, so dass der $I$-Grad $a$ erreicht wird, und eine $Q$-Vection $c-a = ac$, so dass von $a$ aus ein gewisser Punct erreicht wird, nämlich $c$, so beträgt die gesammte Vection $(a-o) + (c-a)$. Die Summe eines Vectors $oa$ und Provectors $ac$ ist aber gleich dem Transvector, also $(a-o) + (c-a) = c-o$ oder $oa + ac = oc$. Findet zuerst eine $Q$-Vection statt von $o$ nach $b$, wobei $ob = ac$ als Vectoren, und dann die $I$-Vection $oa = bc'$, so ist $ob + bc' = oc'$. Da nun $bc' = oa$ als Vectoren und $ob = ac$ als Vectoren, so ist auch, wenn $oa = bc$ als Vectoren, $ob + oa = oc$ als Vectoren, d. h. die Summe der $I$-Vection und $Q$-Vection, welche zugleich stattfinden (wie es in Wahrheit der Fall ist), wird durch den Vector $oc$ ausgedrückt.




Dieser ist nun der Empfindungs- oder *E*-Vector. Er ist für jede e. r. Empfindung ein anderer, indem seine Richtung und Länge variirt. Der *E*-Vector bedeutet also, dass bei gleichzeitiger Änderung der Intensität und Qualität weder jene allein, noch diese allein, sondern beide zusammen additiv empfunden werden. In der *E*-Vection sind die *I*-Vection und *Q*-Vection zur Empfindung vereinigt.

§ 40. Dass der *E*-Vector in der That die Summe des *I*- und *Q*-Vectors ist, liegt also einerseits im Begriff des Vectors (geometrisch), da Vector + Provector = Transvector; andererseits habe ich die Darstellbarkeit der Intensitäts- und Qualitäts-Änderungen durch Vectoren dargethan und die additive Verknüpfung beider zur *E*-Änderung ohne geometrische Hilfsmittel nachgewiesen. Da nun 2 Seiten eines Dreiecks zusammen grösser sind, als die dritte, so folgt, dass die Länge des *E*-Vectors stets kleiner ist, als die Summe der Längen seines *I*- und *Q*-Vectors, d. h.: Wenn in einer Empfindung nur die Stärke oder nur die Qualität oder beides steigt, so steigt auch die Totalempfindung, aber um weniger als die Grösse der Zunahme der Intensität plus der der Qualität beträgt; wohingegen die totale Empfindungsvection stets gleich ist der Summe der Intensitätsvection plus der Qualitätsvection. Aber in der Empfindung kommt ausser der Qualitätsvection und der Intensitätsvection noch etwas zur Geltung. Ausser der Helligkeit und Stufe in der Farbe, ausser der Stärke und Höhe im Ton, ausser dem Druck und der Temperatur in der Berührungsempfindung wird noch die Sättigung empfunden, d. h. die vom *I*- und *Q*-Vector abhängige Neigung des *E*-Vectors gegen die Axen.

§ 41. Vor der Erörterung dieses Gegenstandes wird es nützlich sein die Abweichungen der Gleichungen des vorigen Paragraphen von arithmetischen Gleichungen zu constatiren. Diese Verschiedenheit lässt sich am einfachsten formuliren in dem Satze: Bei der arithmetischen Addition und Subtraction von Linien

kommt nur ihre Grösse (Länge), bei der geometrischen Addition und geometrischen Subtraction, welche im Empfinden sich realisiren, kommt sowohl die Grösse (Länge) wie die Richtung in Betracht, was selbstverständlich nicht hindert, dass, wo es sich als vortheilhaft erweist in Rechnungsoperationen, auch in der Empfindungslehre die arithmetische Addition und Subtraction verwendet werden können. Auch die Punctgleichungen, d. h. im Empfindungsgebiet die Gleichungen zwischen Intensitätsgraden und Qualitätsgraden, sind von algebraischen Gleichungen verschieden, wie schon daraus zu ersehen, dass die Subtraction von 2 Puncten, also von *I*- oder *Q*-Graden, nicht wieder einen Punct, sondern eine Strecke (einen Vector) gibt, nämlich die Empfindung eines Unterschiedes, eine Intervallempfindung. In allen Sinnesgebieten ist die Intervallempfindung für Intensität wie Qualität die Empfindung der Differenz zweier Puncte der Empfindungsebene, aber nur im Tonhöhengebiete wird sie vom empfindenden Subject sogleich beim Empfinden schon quantitativ genau bestimmt.

Was insbesondere die Addition des *I*- und *Q*-Vectors zum *E*-Vector betrifft, so ist leicht zu übersehen, dass was § 39 für den ersten Quadranten der Empfindungsebene ausgeführt wurde, ebenso für die 3 anderen Quadranten auszuführen ist.

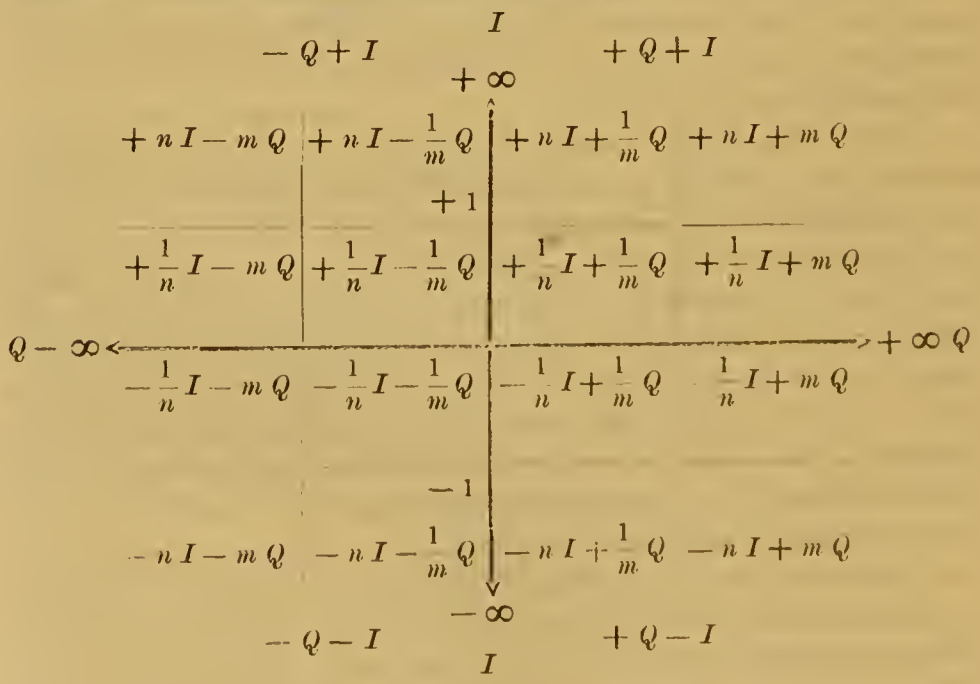
Es genügt aber für die weitere Darlegung, wenn nur der eine Quadrant näher betrachtet wird, in welchem $+I$ mit $+Q$ sich verbindet, d. h. in der e. r. Empfindung sowohl die Stärke wie die Qualität im Urtheil ist.

Nach dem früher gegebenen Nachweis (§ 22) ist hier sowohl intensiv wie qualitativ eine Zweitheilung nothwendig, welche in der ungezwungensten Weise durch die Zahlenreihe von 0 bis $+\infty$ sich veranschaulichen lässt. Dann werden durch die echten Brüche von 0 bis 1 dargestellt einerseits die kleinen Intensitäten, wie dunkel, leise, andererseits die kleinen Qualitäten, wie z. B. Tonhöhen am unteren Ende der Scala. Die unechten Brüche dagegen von 1 bis $\infty$ (sofern auch ganze Zahlen unechte Brüche mit dem Nenner 1 sind) repräsentiren die grossen Intensitäten, wie hell, laut einerseits, die grossen Qualitäten, wie z. B. Tonhöhen am oberen Ende der Scala, andererseits.

Wenn nun $m$ und $n$ ganze Zahlen sind, welche die Einheiten der Intensität ($m$) und der Qualität ($n$) zählen und einander gleich oder voneinander verschieden sein können, so erhält man z. B. für Tonempfindungen folgende alle Möglichkeiten umfassende Tabelle:

| $I$ und $Q$ positiv | $I$ positiv, $Q$ negativ | $I$ negativ, $Q$ positiv | $I$ und $Q$ negativ |
|---|---|---|---|
| $+ n I + m Q$ lauter hoher Ton | $+ n I - m Q$ lauter hoher Ton, dessen Höhe unbekannt | $- n I + m Q$ lauter hoher Ton, dessen Stärke unbekannt | $- n I - m Q$ lauter hoher Ton unbewusst |
| $+ n I + \frac{1}{m} Q$ lauter tiefer Ton | $+ n I - \frac{1}{m} Q$ lauter tiefer Ton, dessen Höhe unbekannt | $- n I + \frac{1}{m} Q$ lauter tiefer Ton, dessen Stärke unbekannt | $- n I - \frac{1}{m} Q$ lauter tiefer Ton unbewusst |
| $+ \frac{1}{n} I + m Q$ leiser hoher Ton | $+ \frac{1}{n} I - m Q$ leiser hoher Ton, dessen Höhe unbekannt | $- \frac{1}{n} I + m Q$ leiser hoher Ton, dessen Stärke unbekannt | $- \frac{1}{n} I - m Q$ leiser hoher Ton unbewusst |
| $+ \frac{1}{n} I + \frac{1}{m} Q$ leiser tiefer Ton | $+ \frac{1}{n} I - \frac{1}{m} Q$ leiser tiefer Ton, dessen Höhe unbekannt | $- \frac{1}{n} I + \frac{1}{m} Q$ leiser tiefer Ton, dessen Stärke unbekannt | $- \frac{1}{n} I - \frac{1}{m} Q$ leiser tiefer Ton unbewusst |

Für die drei oberen Sinnesgebiete erhält demnach die vollständige Empfindungstafel folgenden Inhalt:



## FÜNFTER ABSCHNITT.

# Die geometrische Multiplication der Intensität und Qualität.

§ 42. Die reale Bedeutung der gewöhnlichen algebraischen Multiplication und Division im Empfindungsgebiet kann nicht zweifelhaft sein. Diese associative, commutative. auch wenn der Coëfficient (d. h. der eine Factor des Productes, dessen anderer Factor ein Empfindungsgebilde ist) Null wird, nur éin bestimmtes Resultat gebende Operation bedeutet die Vervielfachung im gewöhnlichen Sinne, d. h. streng genommen eine Addition von gleichartigen Gliedern, die so oft repetirt wird, wie der Coëfficient vorschreibt. Ist nun dieser die Null, so heisst das: die damit zu multiplicirenden *I*-, oder *Q*-, oder *E*-Vectoren, oder *I*-, oder *Q*-Grade (Puncte) sollen keinmal gesetzt werden; der Zustand des empfindenden Subjectes ist der kritische Zustand des auf der Schwelle-Seins. Ist dagegen der Zahlencoëfficient des Vectors $= +1$, so ist eine Empfindungsstrecke einmal da; ist er $-1$, so kehrt sie ihre Richtung um (§ 37). Soweit kann im Gebiet der reinen Empfindung diese Multiplication ausgeführt werden. Wird aber der Coefficient $> 1$, so ist das Object entweder durch Wiederholung in der Zeit oder im Raume vervielfacht, successiv oder simultan; wenn letzteres, dann nur räumlich. Aber nur wenn die successiven Wiederholungen genau den vorherigen Zustand antreffen, ist die Multiplication rein ausgeführt. Hört man zehnmal nacheinander denselben Ton gleich laut, so ist die Tonempfindung mit 10 in der Zeit multiplicirt. Dies nenne ich die successive Multiplication. Ebenso für alle anderen e. r. Empfindungen aller Gebiete und alle Unterschiedsempfindungen. Die Multiplication derselben schon nur mit einer ganzen Zahl im Raume, also die simultane Multiplication der Empfindungen, ist viel complicirter. Ein und derselbe Ton mit éinem Ohre gehört, klingt nicht so laut, wie wenn er mit beiden Ohren — zweimal simultan — gehört wird, und die Höhe verändert sich dabei normaler Weise

nicht. Dagegen ist eine farbige Fläche, die mit beiden Augen gesehen wird normaler Weise nicht heller, als wenn man sie mit einem Auge sieht. Jedoch gibt die simultane Multiplication einer Temperaturempfindung mit einer nicht zu kleinen Zahl die Empfindung einer höheren bez. niedrigeren Temperatur, sofern lauwarmes Wasser wärmer, kaltes kälter erscheint, wenn die ganze Hand eingetaucht wird, als wenn nur ein Finger eingetaucht wird. Alle diese und viele andere algebraische Multiplicationen gehören nicht in die reine Empfindungslehre, sondern in die Wahrnehmungswissenschaft, weil es für sie wesentlich ist, dass sie Raum und Zeit hinzunehmen müssen, um ausführbar zu sein. Sie bleiben deshalb hier unerörtert. Es sei nur noch hervorgehoben, dass man nichtsdestoweniger mit den Producten aus ganzen oder gebrochenen positiven und negativen Zahlen in $I$- oder $Q$-Vectoren auch im Gebiet der e. r. Empfindung geradeso wie in der Geometrie rechnen kann. Immer ist, wenn $I$ einen $I$-Vector bedeutet und $z$ eine solche Zahl

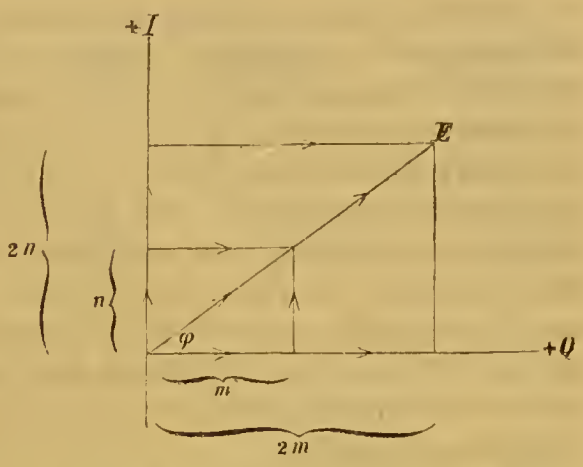
$$1 . I + z . I = (1 + z) . I \text{ und } 0 . I = 0$$

und zwar sind die Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen wieder denen links gleichläufige Vectoren, die Null links die Zahl Null, rechts der Vector (die Intervallempfindung) Null. Jeder $I$-Vector ist ein numerisches Vielfaches seiner Einheit, und jeder $Q$-Vector ein numerisches Vielfaches seiner Einheit, also wenn jene Einheit $= s$, diese $= \alpha$ ist und $n$ und $m$ positive ganze Zahlen sind, so ist, da dann die Einheit des Empfindungsvectors, welcher die Summe beider ist, $= (s + \alpha)$, jede aus $n . s$ und $m . \alpha$ zusammengesetzte Empfindungsvection, also der Vector $E$ einer e. r. Empfindung $= (n . s + m . \alpha)$. Auch auf diesen Ausdruck ist die algebraische Multiplication in allen ihren Eigenthümlichkeiten anzuwenden, denn

$$2 . (n . s + m . \alpha) = 2 . n . s + 2 . m . \alpha$$
$$= (n . 2) . s + (m . 2) . \alpha = n . (2 . s) + m . (2 . \alpha)$$

gibt einen $E$-Vector doppelt so gross wie den, der dem ersteren Ausdruck entspricht, wie die Figur erläutert. Sie zeigt z. B. für Töne, dass die Verdopplung des Empfindungsvectors die neue Toneinpfindung doppelt so laut und doppelt so hoch, wie die einfache, macht. Diese Verdopplung der $E$-Vection als wirkliche Operation im Empfinden und Rechnungsoperation ist etwas ganz anderes, als die successive oder simultane Multiplication als Wahrnehmungsvorgang, denn im ersteren Falle wird beidemal Stärke und Höhe verdoppelt, im letzteren, sei er zeitlich, sei er räumlich, bleibt die Höhe dieselbe, und es ist nicht gesagt, dass die Stärke sich

verdoppelt, sondern nur, dass sie zunimmt, wenn ein Ton zuerst mit einem Ohre, dann mit beiden Ohren empfunden wird.




Entsprechendes gilt für die Division der $I$- und $Q$-Vectoren durch Zahlen, wobei die Theilung sich nur auf die Grösse der Empfindungsunterschiede, d. i. die Vectorenlänge, nicht etwa zugleich mit auf die Richtung bezieht. Diese bleibt dabei unverändert und jede algebraische Vectorendivision ist nur eine algebraische Multiplication mit einem Bruch.

§ 43. Anders die geometrische Multiplication und Division. Die Figur des vorigen Paragraphen erläutert.

Der Winkel, welcher von $E$ und $Q$ gebildet wird, heisse $\varphi$, so ist klar, dass derselbe, wenn $I$ constant bleibt, mit zunehmendem $Q$ abnimmt, wenn $Q$ constant bleibt mit zunehmendem $I$ zunimmt. Wenn nun $\bar{I}$ und $\bar{Q}$ Linien von der Länge des $I$- und $Q$-Vectors bedeuten, so dass $tg\,\varphi = \bar{I} : \bar{Q} = sin\,\varphi : cos\,\varphi$, dann ist der letztere Ausdruck eine blosse Zahl, ein Quotient, dessen Zunahme in der Empfindung zusammengeht mit einer Annäherung der Farbe an Weiss, und dessen Abnahme zusammengeht mit einer Annäherung der Farbe an Schwarz. Man kann in der That sagen, dass dieser Quotient empfunden wird. Nun sind aber zwei extreme Fälle dabei von besonderer Wichtigkeit. Wenn nämlich $\varphi = 0$, also $tg\,\varphi = sin\,0 : cos\,0 = 0$ wird, so ist in der e. r. Empfindung keine Intensität mehr enthalten. Man würde (wenn dann überhaupt noch etwas empfunden werden könnte) absolutes Schwarz haben, oder absolute Stille. Diese Empfindung kommt aber nicht vor, weil jedes Schwarz doch irgendwelche Intensität hat, desgleichen jede Stille. Die Möglichkeit eines absoluten Schwarz kann man sich aber ebensowohl denken wie die Möglichkeit einer absoluten Stille, welche nicht vorkommen, weil die Intensität diese absolute Reinheit der Empfindungsqualität nicht zu Stande kommen lässt. Das andere Extrem $tg\,90^0 = sin\,90^0 : cos\,90^0 = \infty$ verlangt das Gegentheil, nämlich ein absolutes Weiss, und ein absolut Lautestes. Beiden Begriffen entsprechen keine wirklich vorkommenden Empfindungen mehr, wohl aber denkbare.

Zwischen diesen zwei unerreichbaren Extremen, der absoluten Sättigung und Unsättigung, liegen alle wirklich vorkommenden Fälle, deren Annäherung an jene Grenzen durch den Werth des Quotienten $Q:\overline{I}$ oder $tg\,q$, also jedenfalls durch die Neigung des Empfindungsvectors gegen den Qualitätsvector, ausgedrückt werden kann. Von allen diesen Werthen ist nun einer besonders merkwürdig, der nämlich wo der $E$-Vector ebenso gegen den $Q$-Vector, wie gegen den $I$-Vector geneigt ist, also $q = 45^0$ und $tg\,q = sin\,45^0 : cos\,45^0 = 1$, wo also der $Q$-Vector dieselbe Länge wie der $I$-Vector hat. In diesem Falle ist die Farbenempfindung ebenso weit vom absoluten Weiss wie vom absoluten Schwarz entfernt: sie ist gesättigt.

§ 44. Die Geometrie der reinen Empfindung ist nun soweit geführt, dass der wesentliche Inhalt dessen, was im ersten Abschnitt als einfache reine Empfindung bezeichnet wurde, seine räumliche Darstellung vollständig gefunden hat. Es lässt sich auf Grund derselben noch ein weiterer Schritt mit Sicherheit thun. Man kann nämlich aus der Analogie der in der Ebene dargestellten e. r. Empfindungen mit anderen zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten sich Aufschluss über die Beziehung der Einheit der Intensität zu der der Qualität verschaffen. Nicht etwa nur eine äusserliche Ähnlichkeit der imaginären Zahlen mit den (geometrisch in der beschriebenen Weise dargestellten) e. r. Empfindungen, sondern eine strenge geometrische Ableitung (§ 45) ergibt, dass

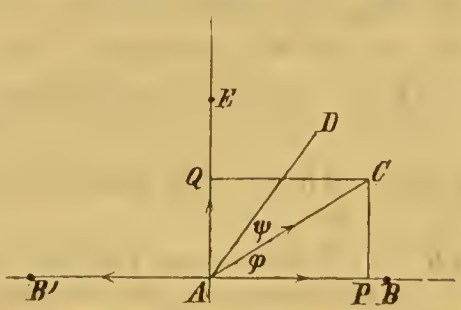
> Wenn die Einheit der Empfindungsintensitätsänderung gleich der numerischen Einheit gesetzt wird, dann die Einheit der Qualitätsänderung $\sqrt{-1}$ ist; die Einheit der Empfindungsvection ist also $\overline{+}(1+i)$.

Die Empfindungsänderungen lassen sich in der That als complexe Grössen auffassen, und zwar als stetig veränderliche complexe Grössen. Genau wie die gemeinen complexen Zahlen $(n+mi)$ in einer Ebene dargestellt werden, indem alle reellen Zahlen $n$ auf der reellen Axe des rechtwinkligen Coordinatensystems und alle rein imaginären (die Producte aus einer reellen Zahl $m$ in $i$) auf der zu jener senkrechten (imaginären) Axe, ihre Darstellung finden, sind die Empfindungsintensitäten, die Grade der Stärke im Empfinden, auf der reellen, die Empfindungsqualitäten (die Stufen oder Grade der Qualitäten) auf der imaginären Axe concret dargestellt. Und wie die gemeinen complexen Zahlen selbst als Endpuncte der Vectoren figuriren oder als diese Vectoren selbst, so

figuriren in der Empfindungsebene die einzelnen Empfindungsgrade gleichfalls als blosse Puncte, indem die Vectoren, welche die einzelnen e. r. Empfindungen miteinander geradlinig verbinden, das Werden der Empfindung aus ihren beiden voneinander unabhängigen disparaten Constituentien, beziehlich den Übergang einer Empfindung in eine andere, also die Empfindungsänderung, und vermöge des Winkels $\varphi$ die Richtung des $E$-Vectors und die Sättigung der Empfindung darstellen. Also ist jede Empfindungsänderung (und damit das Entstehen einer e. r. Empfindung) bestimmt als die Summe einer Intensitätsänderung $=$ ($m$ multiplicirt mit $\pm 1$) plus einer Qualitätsänderung $=$ ($n$ multiplicirt mit $\pm i$).

§ 45. Dass wenn die $I$-Einheit $=1$ ist, dann die $Q$-Einheit $=\sqrt{-1}$ sein muss lässt sich direct zeigen. Man kann nämlich, wenn das Empfindungselement in der reinen Intensitätsänderung begriffen aus dieser Richtung abgelenkt wird, indem es zugleich eine qualitative Änderung erfährt, fragen, inwiefern die resultirende Empfindungsänderung von der Neigung des $E$-Vectors gegen den $I$-Vector abhängt. Näher [1]):

Wenn A eine beliebige e. r. Empfindung von einem mittleren Intensitäts- und Qualitätsgrade bedeutet, so dass auf der $I$-Axe, die Steigerung der Intensität um $+s = AB$, die Verminderung derselben $= -s = AB'$ ist, so wird die Lage des $I$-Grades $B$ gegen $A$ durch $+AB$, des $I$-Grades $B'$ gegen $A$ durch $AB' = -AB$ bezeichnet. Man kann also sagen, dass eine Herabsetzung der Intensität der Empfindung $A$, welche ebensogross wie die Steigerung $AB$ ist, erhalten wird, wenn man letztere mit $-1$ multiplicirt, da $AB' = (-1)\ AB$; der Coëfficient $-1$ drückt also die wechselseitige Beziehung aus, welche zwischen den Lagen der beiden, in gleichen Abständen von $A$ nach entgegengesetzten Richtungen bestimmten $I$-Puncte $B$, $B'$ gegen $A$ statt findet.




Wenn nun in der Empfindungsebene ein dritter Punct, somit eine dritte e. r. Empfindung $C$ in derselben Entfernung von $A$ wie $B$ und $B'$ gegeben ist und der zugehörige Vector $AC$ den Winkel $\varphi$ bildet,

1) Ich wende hier die von Drobisch gegebene geometrische Construction der imaginären Grössen an (Berichte üb. die Verhandlungen d. k. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig 1848. 2. Bd. V. S. 175).

so fragt es sich, ob auch dann noch ein Coëfficient von $AB$ gefunden werden kann, der die Lage von $C$ gegen $A$ in Vergleichung mit der Lage von $B$ gegen $A$ ausdrückt, d. h. ob die Ablenkung des Vectors $s$ von der Richtung $+I$ durch die gleichzeitige $Q$-Vection des Elements gefunden werden kann, indem man $s$ mit einem Coëfficienten multiplicirt. Man kann nun allerdings zeigen [1]), dass ein solcher Coëfficient existirt und zwar ist er, wenn $\pi$ einen Winkel von $180^0$ bezeichnet $= (-1)^{\frac{\varphi}{\pi}}$. Wird $\varphi = \pi : 2$, wo $AC$ in die auf der $I$-Axe senkrechte Gerade $AE$ übergeht, so wird

$$AE = AB(-1)^{\frac{1}{2}} = AB\sqrt{-1} = ABi$$

Also ist $i$ der Coëfficient, durch welchen die senkrechte Lage der damit behafteten Geraden gegen die Lage, welche ihr zukommt, wenn sie den Coëfficienten $\pm 1$ hat, bezeichnet wird [2]), mit anderen Worten: die Einheit der Qualitätsänderung des Empfindungselements wird hinsichts der Intensitätsänderung desselben in der Empfindungsebene, wenn die Einheit der Intensitätsänderung $\pm 1$, ist, durch $\pm i$ bezeichnet.

Ferner ist auch, wenn $CP$, $CQ$ senkrecht zu $AB$, $AE$, der $E$-Vector $AC = AP + PC = AP + AQ$ (nach § 39). Nun ist aber

---

1) Den Beweis gibt Drobisch a. a. O.: Da die Verschiedenheit zwischen der Lage von $C$ gegen $A$ und von $B$ gegen $A$ nur auf der Verschiedenheit der beiden Richtungen $AB$ und $AC$ beruht und diese durch den Winkel $\varphi$ bestimmt wird, so ist $AC = AB \cdot f(\varphi)$. Ändert nun $AC$ seine Lage, indem es in $AD$ übergeht und $\varphi$ in $\varphi + \psi$, so ist $AD = AB \cdot f(\varphi + \psi)$ und auch $AD = AC \cdot f(\psi)$. also $AD = AB \cdot f(\varphi) \cdot f(\psi)$, somit $f(\varphi + \psi) = f(\varphi) \cdot (\psi)$. Dieser Bedingungsgleichung genügt allein $f(\varphi) = a^{\varphi}$, wo $a$ eine noch unbestimmte Grösse, indem $a^{\varphi} \cdot a^{\psi} = a^{\varphi + \psi}$. Demnach ist $AC = AB \cdot a^{\varphi}$, und wenn $\varphi = \pi$ wird: $AC = AB \cdot a^{\pi}$. Für diesen Winkelwerth geht aber $AC$ in $AB'$ über, und ist daher $AC = AB' = -AB$, woraus folgt: $a^{\pi} = -1$ und $a = (-1)^{\frac{1}{\pi}}$, also $AC = AB \cdot (-1)^{\frac{\varphi}{\pi}}$; der gesuchte Coëfficient ist also $(-1)^{\frac{\varphi}{\pi}}$.

2) Vier Jahre vor dem Erscheinen der Abhandlung Drobisch's war Grassmann zu demselben merkwürdigen Resultate gekommen, dass der Ausdruck $\sqrt{-1}$ mit einer Strecke multiplicirt ihre Richtung um $90^0$ ändert, nach irgend einer, dann aber allemal nach derselben Seite hin (Ausdehnungslehre 1844 S. XIV; vgl. Ausdehnungslehre 1862 S. VIII). Drobisch gelangte jedoch schon 1843 (a. a. O. S. 174) zu seiner Entwickelung, ohne sie bekannt zu machen. Auch W. R. Hamilton kam selbständig zu dem gleichen Ergebniss. Allen aber ging Gauss (1831) voran.

der Vector $AP$ ein Theil des Vectors $AB$ und Vector $AQ$ ein Theil des Vectors $AE$. Als gerade Linie ist aber $AP$ derjenige Theil von $AB$, welcher durch Multiplication derselben mit $cos\ \varphi$ erhalten wird: $AP = AB\ cos\ \varphi$ und ebenso ist die Gerade $AQ = AE\ sin\ \varphi$, folglich, da $cos\ \varphi$ und $sin\ \varphi$ nur Zahlen sind, gilt dasselbe für diese Linien als Vectoren (nach § 42). Also ist, wenn ich nun den $I$-Vector $AB$ wieder mit $s$, den $Q$-Vector $AE$ mit $a$ und den $E$-Vector mit $E$ bezeichne

$$E = s\ cos\ \varphi + a\ sin\ \varphi$$
$$E_1 = 1\ (cos\ \varphi + i\ sin\ \varphi)$$

wo $E_1$ die Einheit der $E$-Vection. Allgemein ist, da

$$(-1)^{\frac{\varphi}{\pi}} = cos\ \varphi + i\ sin\ \varphi$$

indem nämlich $cos\ \pi \pm i\ sin\ \pi = -1$, somit $(-1)^{\frac{\varphi}{\pi}} = (cos\pi \pm i\ sin\ \pi)^{\frac{\varphi}{\pi}}$.

$$C = r\ (cos\ \varphi + i\ sin\ \varphi)$$

oder $$= r\ .\ e^{i\varphi}$$

wo $e$ die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems, $r$ die absolute Länge des zu der e. r. Empfindung $C$ gehörigen $E$-Vectors. Der Ausdruck $e^{i\varphi}$ ist also gleichfalls der gesuchte Coëfficient, d. h. der Ort jeder e. r. Empfindung in der Empfindungsebene ist bestimmt durch Multiplication (der absoluten Länge) ihres Abstandes vom Nullpunct in den Zahlenausdruck $e^{i\varphi}$ oder $i^n$, wo $n$ die Anzahl der rechten Winkel um die gedreht werden muss [1]).

Die Übereinstimmung der Empfindungsebene mit der Zahlenebene ist also vollkommen und die einzelnen Begriffe, welche dieser zugehören, übertragen sich ohne Weiteres auf jene. Der Modul der complexen Zahl entspricht der absoluten Entfernung der e. r. Empfindung vom Nullpunct (dem Moment des Erwachens eines Sinnesgebietes), ist also immer eine reelle und positive Grösse. Der Winkel $\varphi$ bezeichnet die Grösse der Abweichung der Empfindungsänderung von der rein qualitativen, bez. rein intensiven

1) Dieses Resultat kann auch nach Grassmann's Methode (Ausdehnungslehre 1862 S. 112 fg.) gewonnen werden, wenn $cos\ \varphi + i\ sin\ \varphi = e^{i\varphi}$ einfach als Drehung und $\varphi$ als ihr Winkel aufgefasst wird. Zur Begründung in der gewöhnlichen Weise scheint aber die obige Ableitung nicht überflüssig. Man sehe V. Schlegel, System der Raumlehre nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und als Einleitung in dieselbe. Leipzig, Teubner 1872. Erster Theil: Geometrie. S. 35 fg.

Änderung, je nachdem man von jener oder von dieser ausgeht. Der von diesem die Richtung der $E$-Vection bestimmenden Winkel allein abhängige Ausdruck $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kann der Sättigungscoëfficient der Empfindung heissen entsprechend dem Richtungscoëfficienten der complexen Grösse. Er bestimmt den Grad der Sättigung.

Jetzt wird es verständlich wie die Empfindung der Annäherung einer Farbenqualität an Weiss bei der $I$-Zunahme auch geometrisch auf einem multiplicativen Vorgang beruht (§ 28), durch welchen der reine $Q$-Vector (bez. der $I$-Vector) eine Richtungsänderung erfährt. Denn die Lage der resultirenden Vection gegen die ursprüngliche ist durch den Winkel $\varphi$ bestimmt und dieser entsteht durch eine Drehung, welche vollständig den Bedingungen des allgemeinsten Multiplicationsbegriffs entspricht. Aber diese Multiplication ist incommutativ [1]). Man kann $\varphi$ als den Winkel des Products der Qualität in die Intensität bezeichnen so lange er nur positiv genommen wird, d. h. so dass sich die Vection des Empfindungselements von $Q$ nach $I$ ändert. Ich kann demnach geradezu sagen, dass die Empfindung der Annäherung einer Farbenqualität an Weiss bei $I$-Zunahme ihr Maass in dem Winkel $+\varphi$ hat, welcher durch Multiplication der Qualität in die Intensität entsteht, oder dass man den Winkel $+\varphi$ als ein Weisslichwerden empfindet. Hieraus ergibt sich dann die reale Bedeutung der geometrischen Division innerhalb der Empfindung von selbst. Denn da die Division nichts Anderes als die Lysis der Multiplication ist, so wird das Rückgängigwerden der Annäherung an Weiss ihr entsprechen müssen, d. h. aber die Annäherung der Qualität an Schwarz bei $I$-Abnahme. Für diese ist nun derselbe Winkel $\varphi$ das Maass, nur in negativer Richtung, somit $-\varphi$ der Winkel des Quotienten der $I$-Vection durch die $Q$-Vection. Die lytische Empfindung des Grau- und Schwärzlichwerdens einer Farbe bei $I$-Abnahme beruht hiernach auf der Empfindung der Abnahme des Winkels $\varphi$; oder, da der $E$-Vector der durch die Beeinflussung des $Q$ durch $I$ in seiner Richtung und Länge veränderte $Q$-Vector ist, $Q\,.\,E = +\varphi$ und $\frac{E}{Q} = -\varphi$, also $Q\,.\,E = -\frac{E}{Q}$ und $-Q\,.\,E = \frac{E}{Q}$, womit die Auffassung der Division in der Quaternionenlehre übereinstimmt.

1) Über die incommutative Vectormultiplication handelt elementar das Schulbuch von Kelland und Tait: *Introduction to Quaternions.* London. Macmillan 1873. Chapter III. Vgl. Hankel a. a. O.

§ 46. Hier schliesst einstweilen meine Arbeit. Ich will nur noch auf den zurückgelegten Weg einen den Anfang und das Ende umspannenden Rückblick werfen. Zuerst wurde festgestellt, dass für ein und dasselbe Sinnesgebiet die Empfindungsänderungen von bestimmter Grösse und Richtung, nämlich die Intensitäts- und Qualitäts-Strecken, je unter sich und miteinander, in der Empfindung associativ und commutativ verknüpft werden und die Lösung der Verknüpfung, nämlich das Rückgängigwerden der Empfindungszunahmen, immer eindeutig ist, also im Empfindenden Additions- und Subtractions-Vorgänge stattfinden. Sodann stellte sich heraus, dass auch eine multiplicative Verknüpfung der *I*- mit den *Q*-Strecken sich vollzieht. Denn wenn sie nur additiv zur e. r. Empfindung sich verbänden, dann würde das, was ausser der Empfindung der blossen Stärke und der blossen Qualität in jeder Empfindung (abgesehen von Raum, Zeit, Ursache, Lust u. s. w.) enthalten ist, nämlich die Empfindung der Sättigung, nicht zu Stande kommen können. Es wurde bewiesen, dass die letztere durch eine nicht additive thetische Verknüpfung bedingt ist, jedoch blieb unberührt, welche besondere Art der Multiplication sie darstelle. Damit schloss die erste allgemeine Untersuchung der Verknüpfung einfacher Empfindungsgebilde. Es zeigte sich ferner, dass die Addition und Subtraction derselben der geometrischen Addition und Subtraction entspricht. Es wurde demgemäss die *I*-Strecke *I*-Vector, die *Q*-Strecke *Q*-Vector genannt. Der Vorgang der Addition des *I*- und *Q*-Vectors zum Transvector, d. h. das Entstehen einer e. r. Empfindung oder einer Empfindungs-Vection oder -Änderung liess sich dabei so auffassen, als wenn das indifferente Empfindungselement, wenn es von Null anfangend eine *I*-Vection erleidet und die *Q*-Vection damit vereinigt (oder umgekehrt), eben dadurch (während seiner Änderung) von der ursprünglichen Richtung in der Empfindungsebene abgelenkt würde. Die Grösse dieser Abweichung bezeichnet der Ablenkungswinkel $\varphi$ mit Einhaltung seiner (positiven oder negativen) Richtung, so dass bei der Einwirkung des *Q* auf *I* dieser Winkel die entgegengesetzte Richtung bei seiner Entstehung innehält, als bei der Einwirkung des *I* auf *Q*, indem einenfalls (plus) die Annäherung der Farbe an Weiss, anderenfalls (minus) die Annäherung derselben an Schwarz zu Stande kommt. Wenn nun dieser Winkel $= 90^0$ wird, d. h. wenn die Beeinflussung des *Q* durch *I*, oder des *I* durch *Q* so gross wird, dass entweder von der *I*-Vection oder von der *Q*-Vection in der *E*-Vection nichts mehr übrig bleiben würde, so

ist dieses gleichbedeutend mit einer Multiplication der einen Richtung mit $i$, so dass wenn die Einheit des $I$ zu $+1$ angenommen wird, dann $Q = i.I$, somit $i$ die Einheit des $Q$ sein muss. Damit ist dargethan, dass die Empfindungen complexe Variable sind, indem der $I$-Vector das Product einer reellen Zahl in die numerische Einheit $\pm 1$, der $Q$-Vector das Product einer reellen Zahl in die sogenannte imaginäre Einheit $\pm i$ ist. Diese Thatsache wurde durch Betrachtung der Ablenkung des einen Vectors ($I$ oder $Q$) um weniger als einen Rechten vervollständigt, indem sich auch die reducirte Form $E = s \cos\varphi + \alpha \sin\varphi$ ableiten liess und $C = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ sich als Ausdruck für den Ort einer e. r. Empfindung in der Empfindungsebene ergab.

Die Übereinstimmung des Verhaltens der Empfindungsgebilde und der complexen Variabeln möchte ich als einen der strengsten mathematischen Prüfung würdigen Gegenstand bezeichnen und als Ausgangspunct neuer physiologischer und psychologischer Untersuchungen wird sie sich jedenfalls fruchtbar erweisen. Hierdurch allein schon, ja schon durch die in keinem Puncte lückenhafte Anwendung der allgemeinen Verknüpfungsgesetze auf die Empfindungsgebilde, welche früher niemand versucht hat, scheint mir eine neue Wissenschaft, eine Psychomathematik, begründet und ein neuer Einblick von Bedeutung in die Natur des Empfindens gewonnen, bei dem man nicht ohne Befriedigung verweilen wird, da auf einmal dem Gesetz ein bisher noch mit grosser Hartnäckigkeit ihm trotzendes Gebiet unterthan wird, und zwar das Gewisseste und Fundamentalste, das es giebt, die Thatsache des Empfindens; dann auch, weil sich hierbei das mathematische Verfahren der Gehirnthätigkeit in überraschender und bewunderungswürdiger Weise bekundet. Was sonst imaginär war, gewinnt eine reale Bedeutung, die viel weiter reicht, als die räumliche Repräsentation. Es ist mir nicht zweifelhaft, dass auch andere als die betrachteten völlig abstracten mathematischen Begriffe, zu denen unsägliches Denken, nach Jahrhunderte dauernder Arbeit erst führte, im Empfindungsgebiete sich realisirt finden werden. Aber nur sehr langsam enthüllt und entwirrt der Verstand die verschlungenen Fäden, deren Enden er selbst festhält.

# ANHANG.

# Bemerkungen
zur
# Theorie der Farbenempfindungen.

Briefliche Mittheilung an den Verfasser [1])
von
Professor Dr. **H. Grassmann**
in Stettin.

Die einfachen Lichtempfindungen sind Gebiete dritter Stufe und werden am vollkommensten dargestellt durch (ungleich intensive) Puncte einer Ebene; auch kann man die Intensitäten dieser Puncte durch Strecken, die in ihnen als Lothe auf der Ebene errichtet sind, sichtbar machen. Diese Eigenthümlichkeit der Lichtempfindungen, die ich in meiner Theorie der Farbenmischungen [2]) aufgestellt habe, ist auch von Helmholtz [3]) vollständig anerkannt.

Bei der Intensität Null hört, wie überall, jede Qualität auf, Schwarz ist eben keine Qualität, sondern

1) Professor Grassmann hatte die Güte, nachdem ich im Frühjahr 1876 ihm meine Anwendungen seiner Ausdehnungslehre auf die Empfindungen mitgetheilt hatte, in einem ausführlichen Schreiben mir anzugeben, worin er beistimmt, worin nicht. Namentlich seine Darstellung der Mannigfaltigkeit der Farbenempfindung weicht von der meinigen durchaus ab. Einige seiner Bemerkungen darüber füge ich zum Vergleich meiner Arbeit bei. Prof. Grassmann nimmt für die einfache reine Farbenempfindung 3 Urvariable an, Intensität, Ton und Sättigung, ich nur 2, indem ich zu zeigen versuchte, dass wenn Intensität und Ton gegeben sind, die Sättigung zugleich mitgegeben ist. Prof. Grassmann's Darstellung passt vortrefflich auf die Mischung **objectiver** Farben, und z. Th. auch zu dem was ich von der Empfindung des Contrastes als eines Multiplicationsactes im wahrnehmenden Subjecte aufgestellt habe.

2) Poggendorff's Annalen 89. Bd. 1854.

3) Handbuch der physiologischen Optik. S. 281 ff.

das Null des Lichtes. In der Qualität tritt erstens der Farbenton hervor in der Reihe: Roth, Gelb, Grün, Blau, Violett, was sich wieder an Roth anschliesst (Braun ist nur ein wenig intensives Roth), und zweitens die Ausgleichung der Farbendifferenzen (sei es durch Vermischung entgegengesetzter, d. h. complementärer Farben, sei es durch Abnehmen oder Aufhören des Unterscheidungsvermögens für die Farbenverschiedenheit). Durch vollständige Ausgleichung entgegengesetzter Farben entsteht das farblose Licht (Grau, Weiss).

Ferner. Grün lässt sich wohl als Farben-Mitte, d. h. als Mittel zwischen der tiefsten und höchsten Farbenempfindung auffassen. Der Nullpunct der Farbenempfindung tritt aber in der Empfindung des farblosen Lichtes, sowie in der des gänzlichen Lichtmangels hervor also in der Reihe: Schwarz, Grau, Weiss mit ihren Abstufungen. Daraus folgt aber sogleich der Begriff der negativen Farben. Nämlich zu jeder Farbe muss die entsprechende negative die sein, welche zu ihr addirt, d. h. mit ihr vermischt, Weiss gibt, d. h. die Complementärfarbe. Es sind also die Complementärfarben durch entgegengesetzte (aber gleich lange) Strecken der Ebene anschaulich darstellbar. Ausser jenem Null der Farbe, d. h. dem farblosen Lichte, gibt es aber auf dem Gebiete der Lichtempfindungen noch ein zweites von jenem und vom Null der gesammten Intensität verschiedenes Null, das ist eben das Null des farblosen Lichtes. Eine Farbe, welcher kein farbloses Licht beigemischt ist, heisst eine gesättigte. Objectiv wird diese Sättigung erreicht durch die reinen prismatischen Farben. Allein da wir diese nicht unmittelbar wahrnehmen, sondern nur durch das Medium des Auges, in diesem aber durch eine grosse Reihe secundärer Vorgänge (Brechung, Zurückwerfung, Absorption, Fluorescenz) das dem Auge zugesandte Licht vielfache objective Änderung erleidet, ehe es zu den Nervenenden, welche die Empfindung aufnehmen, gelangt, so ist es wahrscheinlich, dass wir die Empfindung gesättigten Lichtes nur annäherungsweise erfahren, also das Null des farblosen Lichtes in der Empfindung nicht vollkommen erreicht wird, am vollkommensten wohl, wenn die durch Blicken auf ein sehr helles farbiges Licht hierfür abgestumpfte Stelle der Netzhaut nun nach Erlöschen jenes Eindrucks durch Hinblicken auf eine möglichst gesättigte Complementärfarbe, diese empfängt, also in den sogenannten negativen Nachbildern.

Die Änderung der Qualität bei der Steigerung einer Farbe ist ein secundärer Vorgang, der eines Theils in einer objectiven Veränderung des Lichtes durch Brechung, Zurückwerfung, Absorption und Fluorescenz im Auge selbst besteht, ehe noch das Licht die Empfindungsorgane erreicht, andern Theils auf einer subjectiv sehr verschiedenen und bisher noch sehr wenig erforschten Unempfänglichkeit der Nerven für Farben- und Intensitätsunterschiede, auf einer relativen Farbenblindheit beruht.

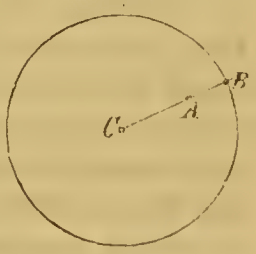
So viel scheint sicher, dass diese Erscheinungen nur secundärer, zum Theil subjectiver Art sind.

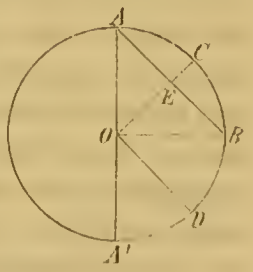
Dagegen bewegen wir uns in der Theorie der Farbenmischung auf einem sicheren, den objectiven Erscheinungen überall Rechnung tragenden Gebiet, und muss dies daher die Grundlage für die Theorie der reinen Lichtempfindungen sein. Zunächst erhalten wir dadurch einen, und zwar den einzigen aus blosser Lichtempfindung ableitbaren, festen Maassstab für die Bestimmung der gleichen Intensität verschiedener Farben. Mischt man z. B. Gelb von der Wellenlänge 567,1 mmm (mmm bedeutet Millionstel Meter) mit Indigo von 472,6 mmm, und zwar in dem Intensitätsverhältnisse, dass sie farbloses Licht geben, so haben wir diese beiden Intensitäten (nach dem Obigen) als gleich gross anzusehen, und sie erweisen sich auch objectiv (wenn man die Lichtstärke nach Helmholtz durch die bei der Absorption entstehende Wärme bestimmt) als gleich, und bleiben es auch, wenn man die beiden Intensitäten in beliebigem, aber gleichem Verhältnisse ändert; denn wäre letzteres nicht der Fall, so müsste man durch Mischung zweier farbloser Lichter farbiges erzeugen können, was unmöglich ist. Betrachte ich nun eine dritte Farbe, etwa Goldgelb von 585,2 und das complementäre Cyanblau von 485,4 mmm, und bestimme ihre Intensitäten so, dass sie beide zusammengemischt ebensoviel Weiss geben, wie vorher Gelb und Indigo, so haben wir 4 Farben, die als intensiv gleich zu betrachten sind. Dass sie auch objectiv gleich sein müssen, folgt aus dem Satze (Helmholtz S. 309): „Wenn Licht aus verschiedener Quelle zusammentrifft, so wird die Gesammtintensität gleich der Summe der einzelnen Intensitäten“ (vergl. meine Abhandlung[1]) S. 82). Denn da nun in beiden Mischungen die Summen der Intensitäten gleich sind, und die beiden Intensitäten, aus denen jede dieser Summen entsteht, so müssen alle 4 so bestimmten Farben objectiv

1) Poggendorff's Annalen 89. Bd. 1854.

gleiche Intensitäten haben. So kann man für alle Spectralfarben, die eine Complementärfarbe besitzen, ihre gleiche Intensität nachweisen, und also auch die Verhältnisse ihrer Intensität. Für Grün kann man dann die gleiche Intensität objectiv bestimmen. So würde man schon einen Farben*kreis* erhalten, an dem nur diejenigen Farben fehlen würden, die im Spectrum zu fehlen scheinen, nämlich Purpur mit seinen Abstufungen. Aber ich glaube, dass auch diese Lücke nur eine scheinbare ist. Setzt man das äusserste Roth von 812,5 mmm mit dem Violett von 406,2 also mit seiner Octave zusammen, so entsteht ein Roth, was einen ebenso gesättigten Eindruck macht wie die anderen Spectralfarben; wenn man jenes Violett recht dunkel nimmt, so geht es (nach *Helmholtz*) in Rosaroth also, abgesehen von dem durch Fluorescenz beigemischten Weiss, in Purpur über, und ich glaube, dass diese beiden um eine Octave verschiedenen Farben, wenn man die secundären Einflüsse entfernen könnte, denselben Eindruck hervorrufen, und also in ihrer Verbindung eine gesättigte Farbe gleich denen des Prisma geben müssen. Aber auch abgesehen davon lässt sich jene, jedenfalls nur sehr geringe Lücke annäherungsweise herstellen und dadurch der Farbenkreis vollenden. Aber die Stellung der Farben in diesem Kreise ist dadurch noch nicht festgestellt. Um sie festzustellen ist zuerst festzuhalten, dass jede Lichtempfindung sich (*Helmholtz* S. 282 Z. 3—7, meine Abh. S. 71 Z. 1—3) durch Mischung einer gewissen Intensität farblosen Lichtes mit einer gewissen Intensität einer gesättigten (Spectral-)Farbe darstellen lässt, und die Summe dieser beiden Intensitäten die gesammte Intensität der Lichtempfindung ist. Ich habe in dieser Mischung die Intensität des farblosen (weissen) Lichtes die Intensität des beigemischten Weiss, und die Intensität jener homogenen Farbe die Farbenintensität der Lichtempfindung genannt. Durch den Farbenton und diese beiden Intensitäten ist dann die Lichtempfindung genau bestimmt. Aber es ist noch eine (formelle) Bestimmung über die Abweichung zweier homogener Farben zu machen; ich sage 2 homogene, gleich intensive Farben weichen um denselben *Winkel* von einander ab, wie zwei andere gleich intensive, wenn die beiden ersten mit einander vermischt, dieselbe Intensität farblosen (weissen) Lichtes liefern, wie die beiden letzten. Durch diese Bestimmung ist, wenn man noch hinzunimmt, dass 2 gleich intensive homogene Farben den mittleren Farbenton geben, nun auch die Vertheilung der Farben auf dem Farbenkreise genau bestimmt. Nehmen wir zunächst wieder die beiden obigen

Complementärfarben Gelb und Indigo (deren Winkel, da sie entgegengesetzt sind, 180° beträgt). Nun wird es z. B. in der Farbenreihe, die von Gelb durch Grün zu Indigo übergeht, eine homogene Farbe geben, die von dem Gelb unter demselben Winkel abweicht wie von dem complementären Indigo, also um den Winkel von 90°, und die man daher die zu jener normale Farbe nennen kann. Wird Gelb etwa mit $a$, die complementäre also mit $-a$ bezeichnet, so kann die normale mit beiden gleich intensive mit $a\sqrt{-1} = ai$ bezeichnet werden, und man kann nun ähnliche Methoden wie die Ihrigen für die weiteren Folgerungen anwenden. Namentlich kann man den Hauptsatz der Farbenmischung (meine Abh. S. 83) ableiten, wonach, wenn man jede Farbenempfindung durch einen intensiven (schweren) Punct $\alpha A$ darstellt, dessen Richtung vom Centrum $C$ des Farbenkreises den Farbenton, dessen Intensität $\alpha$ die Gesammtintensität, dessen Entfernung $(CA)$ vom Centrum mit $\alpha$ multiplicirt die Farbenintensität, und dessen Entfernung $(AB)$ von der Peripherie mit $\alpha$ multiplicirt also die Intensität des beigemischten Weiss darstellt, vorausgesetzt, dass der Radius $CB$ seiner Länge nach $= 1$ gesetzt wird, dann die Mischung zweier Lichtempfindungen durch die (barycentrische) Summe der intensiven Puncte, welche diese beiden Lichtempfindungen darstellen, dargestellt wird. Hierbei ist vor allen Dingen zu merken, dass hier nicht etwa bloss ein Vergleich mit der Planimetrie gegeben wird, sondern man hat es überall nur mit der abstracten Grundlage der Planimetrie zu thun, die hier in den Lichtempfindungen ebenso ursprünglich hervortritt wie in der Planimetrie selbst. Die aus der Planimetrie entnommenen Ausdrücke sind hier nur, weil sie allgemein bekannt sind, auf unsere Wissenschaft übertragen. Die Ableitung dieses Satzes auf dem hier begonnenen Wege ist interessant, aber sehr weitläufig. Ich gebe ein Beispiel. Es sei $A$ eine homogene Farbe mit der Intensität 1, $A'$ die Complementärfarbe, $B$ die gegen beide normale mit der Intensität 1; gesucht sei die Mischung. Ihr Farbenton wird von $A$ und $B$ gleich weit abweichen, also um den Winkel von 45°, dieser sei $C$, ebenso sei $D$ der Farbenton der Mischung von $B$ und $A'$, also der Winkel $CD$ ein rechter. Nun sei für die Mischung von $A$



und $B$ die Intensität des beigemischten Weiss $y$ und die Farbenintensität $x$, d. h.

$$A + B = xC + yw$$ wenn $w$ das Weiss von der Intensität 1 bedeutet, und ebenso

$$A' + B = xD + yw,$$ wo übrigens $x + y = 2$

also $A + A' + 2B = x(C + D) + 2yw$, oder da $A + A' = 2w$ ist

$$2B + 2w = x(C + D) + 2yw.$$

Nun ist aber $C$ zu $D$ normal und zwischen ihnen in der Mitte liegt $B$, also

$$C + D = xB + yw$$

also

$$2B + 2w = x(xB + yw) + 2yw$$
$$= x^2B + (x + 2)yw$$

Daraus folgt $x^2 = 2$, $x = \sqrt{2}$, also $y = 2 - \sqrt{2}$. Nennt man $E$ den Schneidepunct von $AB$ mit $OC$, so ist $OE = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; dies mit der Gesammtintensität 2 multiplicirt, sollte, wenn der Hauptsatz gilt, die Farbenintensität $x$ liefern, was stimmt; ebenso ist $EC = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$, also mit 2 multiplicirt $2EC = 2 - \sqrt{2} = y$. Es ist der auf diesem Wege geführte Beweis viel weitläufiger und auch lange nicht so streng, als der in meiner Abhandlung gegebene. Aber dieser muss bedeutende begriffliche Schwierigkeiten haben, da ihn auch Helmholtz nicht ganz verstanden hat.

Es ist dort von einer an sich beliebigen homogenen Farbe in einer beliebigen Farbenintensität, die = 1 gesetzt wird, ausgegangen (Gelb), dann die Complementärfarbe (Indigo) bestimmt und ihre Intensität, sofern sie mit jener farbloses Licht liefert, gleichfalls 1 gesetzt. Dann ist die homogene Farbe bestimmt, welche zu jenem Gelb gemischt, ebensoviel farbloses Licht liefert, wie mit jenem Indigo, d. h. die zu beiden normale homogene Farbe; ihre Intensität ist so bestimmt, dass sie mit ihrer Complementärfärbe ebenso viel Weiss liefert, wie die obigen Gelb und Indigo. Dies sei ein bestimmtes Grün. Dann sind hierdurch 2 genau definirte Einheiten (Gelb und Grün) gewonnen, welche zunächst benutzt werden, um die Farbenintensitäten ihrer Mischungen darzustellen. Da der Begriff der Intensität verschiedener homogener Farben erst durch die Mischung festgestellt werden soll, so kann man, wenn der Kürze wegen jenes Gelb mit $A$, jenes Grün mit $B$, und das Weiss, dessen Intensität = 1 ist, mit $O$ bezeichnet wird, für die Farbenintensität der Mischung $\alpha A$ (Gelb mit der Intensität $\alpha$ und wenn $\alpha$ negativ $= -\acute{\alpha}$ ist, Indigo mit der Intensität $\acute{\alpha}$) und $\beta B$, wo $\alpha : \beta$ ein beliebiges Verhältniss haben, festsetzen, dass sie gleich

der Strecke $\alpha OA + \beta OB$ [d. h. $\alpha(A-O) + \beta(B-O)$] sein soll, und die Richtung dieser Strecke (alles im Sinne der Ausdehnungslehre) den Farbenton darstellen soll. (Auch hätte man $OA = 1$ und $OB = i = \sqrt{-1}$ setzen können, ohne dadurch freilich etwas zu gewinnen). Hieraus folgt nun das oben aufgestellte Gesetz der Farbenmischung ganz wie in meiner Abhandlung vermittelst der auch von Helmholtz anerkannten Sätze aufs allerstrengste. Auch folgt nun aus diesem Hauptgesetzte sogleich, dass, wenn man eine beliebige andere Farbe statt des Gelb zu Grunde legt, ganz dieselben Resultate hervorgehen, dass ferner jede homogene Farbe von der Intensisät 1 mit ihrer complementären ebenso viel Weiss giebt, wie jede andere solche mit ihrer complementären, ferner dass es gleichgültig ist, welche Intensität man 1 setzt. Kurz, es ist hier alles in vollster Harmonie, und muss diese Theorie ebenso die Grundlage für die Theorie der Farbenempfindungen sein, wie die Addition für die Ausdehnungslehre.

Was nun die Multiplication betrifft, so beruht die Multiplication mit einer Zahl, d. h. die Vervielfachung, zunächst auf einem wiederholten Additionsprocess. Ist $A$ irgend eine Empfindung, so sind $A, A + A = 2A, 2A + A = 3A, \ldots$ Empfindungen die qualitativ gleich sind, und sich intensiv wie $1 : 2 : 3 \ldots$ verhalten, setzt man nun irgend eine dieser Intensitäten 1, so erhält man die Intensitäten als Brüche, und setzt man $A$ unendlich klein, so erhält man die Intensitäten in stetiger Form. Diese Multiplication wiederholt sich natürlich auf allen Empfindungsgebieten. Ihr tritt eine zweifache Division gegenüber, nämlich die Division durch eine Zahl, oder Theilung, die aber auch durch Multiplication mit einem Bruch ersetzt werden kann, und zweitens die Division zweier qualitativ gleicher Empfindungen durcheinander, deren Resultat eine Zahl ist, welche das Verhältniss der Intensitäten darstellt. Die Zahl ist eine Grösse nullter Stufe. Ausser ihr gibt es aber noch in Gebieten von höherer als erster Stufe andere Grössen nullter Stufe, welche ich in meiner Ausd. 1862 ausführlich behandelt habe, und welche besonders für die durch Strecken darstellbaren Farbenintensitäten von Interesse sind. Im Allgemeinen ist solche Grösse nullter Stufe dadurch bestimmt, dass festgesetzt wird in welche andere Grösse jede Grösse des betrachteten Gebietes sich durch Multiplication mit einer solchen Grösse nullter Stufe verwandelt. Da für sie wie für jede Multiplication das Beziehungsgesetz (das distributive Princip) gilt, so ist für ein Gebiet $n$-ter Stufe nur festzusetzen, in welche Grössen sich die $n$ Einheiten des

Gebietes durch jene Multiplication verwandeln. Für das Strecken-Gebiet zweiter und dritter Stufe bilden die Hamilton'schen Quaternionen einen besonderen Fall dieser Grössen nullter Stufe. Für die Farbenintensitäten, welche ein Streckengebiet zweiter Stufe bilden, sind die Hamilton'schen Quaternionen solche Grössen nullter Stufe, welche 2 Strecken (die nicht parallel sind), und also auch alle Strecken um gleiche Winkel ändern und ausserdem noch mit einer Zahl multiplicirt sein können. So z. B. drückt $ae^{i\alpha}$, wo $a$ eine homogene Farbe, $\alpha$ einen Winkel darstellt, eine andere homogene Farbe von gleicher Intensität aus, die von jener um den Winkel $\alpha$ abweicht. Die Division mit $e^{i\alpha}$ gleich Multiplication mit $e^{-i\alpha}$.

Aber auch die combinatorische (auf ein Gebiet bezügliche) Multiplication tritt auf dem Gebiete der Lichtempfindungen (als einem Elementargebiete dritter Stufe) in qualitativer Beziehung sehr leicht und einfach hervor. Sind z. B. $a$ und $b$ zwei Lichtempfindungen, so drückt das combinatorische Product $[ab]$ qualitativ das Gebiet der Geraden $ab$, d. h. die Gesammtheit aller Lichtempfindungen aus, welche sich aus $a$ und $b$ numerisch ableiten lassen (nämlich durch positive Zahlen für die zwischen $a$ und $b$ liegenden, durch entgegengesetzte für die ausserhalb liegenden, und wenn sie ausserhalb des Farbenkreises zu liegen kommen, so hat man ideelle Lichtgebilde, denen keine reelle Empfindung entspricht; d. h. wenn auch $c$ und $d$ zwei Lichtempfindungen sind, so ist $[ab]$ qualitativ gleich $[cd]$, in Formeln $[ab] \equiv [cd]$ dann und nur dann, wenn die beiden Gebiete zusammenfallen, oder wenn beide Producte null sind. Aber $[ab]$ ist nur null, wenn $a \equiv b$ (qualitativ gleich $b$) ist. Zweitens wenn $[ab]$ und $[cd]$ qualitativ verschieden (und keins derselben null ist, so drückt das Product $[ab \,.\, cd]$ qualitativ die Lichtempfindung (reelle oder ideelle) aus, welche beiden Gebieten gemeinsam ist), d. h. welche sich sowohl aus $a$ und $b$ als auch aus $c$ und $d$ numerisch ableiten lässt; gibt es aber keine beiden Gebieten gemeinsame reelle oder ideelle Empfindung, so heissen die Gebiete parallel und das Product $[ab \,.\, cd]$ stellt dann qualitativ eine Strecke, d. h. die Differenz zweier gleich intensiver Lichtempfindungen dar [Ausd. 1862 No. 289 u. 290].

Es war bisher der Werth der Producte $[ab]$ und $[ab \,.\, cd]$ nur qualitativ betrachtet; will man auch ihren quantitativen Werth haben, so muss man auf eine neue Empfindung, die des Contrastes eingehen, welche schon aus dem Bereich der bisher betrachteten

einfachen reinen Empfindungen in das der combinirten hinüberschweift. Doch sind diese noch eher einer rein wissenschaftlichen Betrachtung fähig, als z. B. die scheinbare Änderung der Farbenqualität bei veränderter Intensität, wozu es noch an jeder sicheren wissenschaftlichen Basis fehlt, und Gewöhnung, Ermüdung nebst den noch nicht hinreichend ermittelten objectiven Vorgängen im Innern des Auges von grossem Einflusse sind.

Will man nun das Product $[ab]$ als Contrast der Lichtempfindungen $a$ und $b$ auffassen, so muss man den Begriff des Contrastes einschränken und dem Begriffe jenes Productes adäquat gestalten. Da das Product $[ab]$ null ist, wenn $a$ und $b$ qualitativ gleich sind, so ist der Gegensatz von hell und dunkel ganz aus dem Begriffs-Bereiche dieses Contrastes zu verbannen, und für diesen Begriff eine verschiedene Qualität von $a$ und $b$ als nothwendige Bedingung festzuhalten. Sind $a$ und $b$ zwei Lichtempfindungen von gleicher Intensität 1 so stellt $[ab]$ den Contrast $b—a$ dar auf dem Gebiete $ab$, in der Art, dass wenn $a, b, c, d$ von gleicher Intensität sind $[ab] = [cd]$ dann und nur dann ist, wenn $[ab] \equiv [cd]$ (s. o.) und ausserdem $a - b = c - d$ ist. Wachsen die Factoren $a$ und $b$ ihrer Intensität nach und zwar $a$ im Verhältniss $1 : x$ und $b$ im Verhältniss $1 : y$, so wächst $[ab]$ im Verhältnisse $1 : xy$. Ob aber der so aufgefasste Contrast für das Gebiet der Empfindung eine wesentliche Bedeutung habe, ist mir sehr zweifelhaft. Hauptsache scheint hier der qualitative Contrast von gleich intensiven Empfindungen.